Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esercizi per il Corso di LOGICA MATEMATICA - INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE CATEGORIE

Foglio 5
24 ottobre 2019

1. Siano U, V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Sia $\mathsf{Bil}(U \times V, W)$ l'insieme delle funzioni bilineari $U \times V \longrightarrow W$.
   (a) Si dimostri che $\mathsf{Bil}(U \times V, W)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
   (b) Si dimostri che $\mathsf{Bil}(U \times V, W) \cong \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}(U, \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}(V, W))$ (si consideri la funzione lineare che ad ogni $\phi \in \mathsf{Bil}(U \times V, W)$ associa la funzione che a $u \in U$ associa $\phi(u, -) \in \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}(V, W)$). Analogamente si concluda che $\mathsf{Bil}(U \times V, W) \cong \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}(V, \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}(U, W))$.
2. Si consideri $\mathbb{K}$ il campo con 2 elementi ($\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{K}$. Si determinino tutti gli elementi di
   (a) $V \times V$;
   (b) $F(V \times V)$, lo spazio vettoriale libero, di base $V \times V$;
   (c) del sottospazio K tale che $F(V \times V)/K \cong V \otimes V$:
   (d) del prodotto tensoriale $V \otimes V$.
3. Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Si dimostri che
   (a) $V \otimes W \cong W \otimes V$;
   (b) $V \otimes \{0\} = \{0\}$
   (c) $V \otimes \mathbb{K} \cong V$
   (d) Se $f \colon V \to W$ è una funzione suriettiva, allora $f \otimes 1_Z \colon V \otimes Z \longrightarrow W \otimes Z$ è suriettiva.