Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esercizi per il Corso di LOGICA MATEMATICA - INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE CATEGORIE

Foglio 4

17 ottobre 2019

1. Si dimostri che il funtore $\mathsf{Set}(\{*\}, -)\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$ è naturalmente equivalente al funtore identità in Set.

2. Si dimostri che il funtore $(-)^{**}\colon \mathsf{FDVect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathsf{FDVect}_{\mathbb{K}}$ è naturalmente equivalente al funtore identità in Set.

3. Si dimostri che se $\alpha\colon F \longrightarrow G$ è una equivalenza naturale, allora esiste una equivalenza naturale $\beta\colon G \longrightarrow F$.

4. Sia $\mathcal{B}$ la categoria in cui gli oggetti sono insiemi finiti e gli morfismi $\mathcal{B}(X, Y)$ sono le biiezioni $X \longrightarrow Y$.

   (a) Si definisca un funtore $S\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathsf{Set}$ che ad ogni insieme finito X associ l'insieme delle permutazioni di X, cioè $S(X) := \mathcal{B}(X, X)$.

   (b) Si definisca un functor $O\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathsf{Set}$ che ad ogni insieme finito X associ l'insieme delle ordini totali di X.[1]

   (c) Si osservi che gli insiemi $S(X)$ e $O(X)$ hanno la stessa cardinalità e che, quindi, sono isomorfi in Set.

   (d) Si dimostri che non esiste nessuna trasformazione naturale $S \longrightarrow O$.[2]

   (e) Si concluda che nonostante $S(X) \cong O(X)$ per ogni insieme finito X, questi isomorfismi non sono naturali.

5. Si completi la dimostrazione del teorema che afferma un funtore F è una equivalenza di categorie se e solo se F è pienamente fedele e denso.

   (a) Sia $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtore pienamente fedele e denso. Per ogni oggetto Y di $\mathcal{D}$ si scelga un oggetto $G(Y)$ e un isomorfismo $\alpha_Y\colon F(G(Y)) \longrightarrow Y$ (F è denso). Per ogni morfismo $f\colon Y \longrightarrow Z$ in $\mathcal{D}$, esiste un unico morfismo $g\colon G(Y) \longrightarrow G(Z)$ in $\mathcal{C}$ tale che $F(g) = \alpha_Z^{-1} \circ f \circ \alpha_Y$ (F è pienamente fedele). Si definisca $G(f) = g$. Si dimostri che G è un funtore e che $\alpha\colon F \circ G \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathcal{D}}$ è una equivalenza naturale.

   (b) Siccome F è pienamente fedele, per ogni oggetto X in $\mathcal{C}$ esiste un unico morfismo $\beta_X\colon G(F(X)) \longrightarrow X$ tale che $F(\beta_X) = \alpha_{F(X)}$. Si dimostri che β è una equivalenza naturale $G \circ F \longrightarrow \mathsf{Id}_{\mathcal{C}}$.

6. Si dimostri che se F è una equivalenza di categorie e se G è un funtore naturalmente equivalente a F, allora G è una equivalenza di categorie.

7. Si dimostri che la relazione fra categorie *essere equivalente a* è una relazione di equivalenza.

---

[1] Una ordine totale in un insieme X è una ordine parziale $\leq$ in cui per ogni due elementi x e y in X abbiamo che $x \leq y$ oppure $y \leq x$. In altre parole, una ordine totale in X è un modo di ordinare successivamente tutti gli elementi di X

[2] Suggerimento: Si guardi cosa succederebbe alla permutazione identità in caso ci fosse una tale trasformazione naturale).