

leone corradi dell'acqua

meccanica delle strutture
la valutazione
della capacità portante

McGraw-Hill Libri Italia srl

Milano • New York • St. Louis • San Francisco • Oklahoma City • Auckland
Bogotá • Caracas • Hamburg • Lisboa • London • Madrid • Montreal • New Delhi
Paris • San Juan • São Paulo • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

13.1 CONSIDERAZIONI INTRODUTTIVE

13.1.1 IL COMPORTAMENTO IDEALMENTE PLASTICO

La resistenza di qualunque materiale è inevitabilmente limitata, in quanto esiste un livello di sforzo che comunque non può essere superato. Ne consegue che pure limitata è la *capacità portante* di una struttura, vale a dire l'entità dei carichi che essa è in grado di reggere. La valutazione della capacità portante è un problema di importanza evidente, che non può essere affrontato in ambito elastico-lineare perché nessun materiale si mantiene tale fino all'esaurimento delle sue risorse. Sono peraltro disponibili modelli costitutivi in grado di rappresentare aspetti anelastici del comportamento ed è quindi in linea di principio possibile seguire l'evoluzione della struttura fino al raggiungimento di una situazione di crisi. Tale procedimento è però solo parzialmente attendibile, in quanto la soluzione spesso dipende non solo dal valore finale del carico ma anche dalla storia seguita per raggiungerlo. Il risultato è quindi a rigore valido limitatamente alla particolare storia ipotizzata nel calcolo.

Esistono tuttavia materiali che presentano una notevole *duttilità*. Anche se il livello di sforzo non può superare una determinata soglia, essi possono deformarsi in misura cospicua prima di giungere a rottura. In tal caso la crisi della struttura non è di regola associata al cedimento di alcuni elementi per rottura del materiale di cui sono costituiti, ma piuttosto all'impossibilità di assicurare l'equilibrio senza eccedere il livello di sforzo ammissibile. Tale modalità di crisi è nota come *collasso plastico* e il carico sotto cui si verifica come *carico di collasso*. Sotto ipotesi del tutto ragionevoli in molte situazioni reali, il *valore del carico di collasso risulta indipendente dalla storia di carico*. Questa notevole circostanza rende possibile la sua valutazione diretta, che costituisce l'oggetto del *calcolo a rottura (o analisi limite)*, uno dei più significativi capitoli della meccanica delle strutture.

Le ipotesi necessarie sono semplicemente quelle di piccoli spostamenti, che deve essere applicabile nella sua interezza, e di *plasticità ideale (o perfetta)*. Questa idealizzazione del comportamento, che svolge un ruolo preminente in questo capitolo, viene ora esaminata in dettaglio.

Le principali caratteristiche del comportamento di un materiale duttile possono essere visualizzate da una curva uniaassiale, come quella di trazione illustrata in Figura 13.1 e relativa a un acciaio di carpenteria corrente (i valori numerici si riferiscono ad acciai *Fe E 235-355*). Per deformazioni non eccessive (valori di ϵ superiori al 10-15% fanno sì che la curva dipenda dalle misure di sforzo e deformazione usate, in figura quelle nominali) il comportamento è in buona misura simmetrico a trazione e compressione.

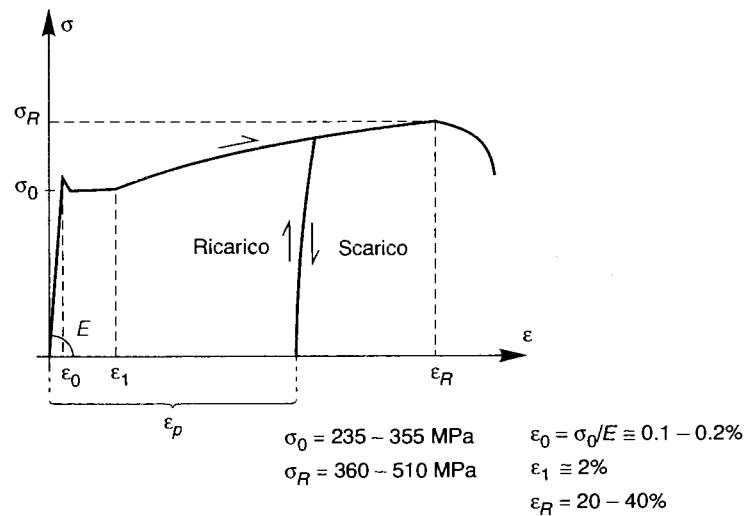


Figura 13.1

I suoi aspetti salienti si riassumono come segue.

Esiste una fase elastica ben marcata, in cui è applicabile il legame lineare $\sigma = E\epsilon$. Essa è relativa all'intervallo $-\epsilon_0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, dove ϵ_0 è di regola lo 0.1-0.2%; il corrispondente sforzo $\sigma_0 = E\epsilon_0$ identifica il *limite di snervamento*. Tale fase è seguita da un pianerottolo pressoché orizzontale, dove il materiale fluisce a sforzo costante $\sigma \approx \sigma_0$ fino a deformazioni almeno di un ordine di grandezza superiori a ϵ_0 . Si riscontra poi un recupero di rigidità (*incrudimento*), governato da un *modulo tangente* E_t variabile con la deformazione ma sempre sensibilmente minore del modulo elastico iniziale E . Ciononostante, questa fase comporta significativi incrementi di sforzo rispetto al valore di snervamento, in quanto il provino giunge a rottura per deformazioni molto elevate. Allo scarico, la deformazione recuperata è circa pari a σ/E ; la parte restante (ϵ_p in figura) rappresenta un contributo permanente, o *plastico*. In caso di "ricarico", il materiale risponde in modo quasi elastico fino al raggiungimento della curva relativa al materiale vergine, che viene poi ripercorsa fino a rottura. Non tutti i valori riportati sul grafico sono egualmente attendibili: se i dati sperimentali relativi al modulo elastico iniziale E e al limite di snervamento σ_0 risultano, per un determinato tipo di acciaio, abbastanza poco dispersi, non altrettanto si può dire della lunghezza del pianerottolo orizzontale e della successiva curva che descrive la fase di incrudimento. È comunque assicurata una notevole *duttilità*, nel senso che la deformazione a rottura è tipicamente circa cento volte quella al limite elastico.

Le deformazioni permanenti sono dovute a un riassetto irreversibile del reticolo cristallino del materiale. Ai fini applicativi della meccanica delle strutture, la natura policristallina del mezzo può peraltro essere ignorata, assimilando il materiale a un continuo e incorporando nel legame costitutivo la fenomenologia macroscopica del comportamento. Il modello *elasto-plastico ideale* ne recepisce gli aspetti essenziali; esso è basato sulle ipotesi seguenti.

1. Esiste un *dominio elastico* di ampiezza costante, indipendente dalla storia di deformazione, definito dalle disequaglianze

$$-\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_0 \tag{13.1}$$

Il valore σ_0 , di regola identificato con il limite di snervamento del materiale, rappresenta anche la sua resistenza ultima; si suppone cioè che il materiale sia incapace di sopportare sforzi $|\sigma| > \sigma_0$.

2. Il materiale presenta *duttilità illimitata*. Si ipotizza cioè che esso sia in grado di subire deformazioni di qualsiasi entità per $|\sigma| = \sigma_0$, purché nel verso di plasticizzazione.
3. Il comportamento è *irreversibile*. In fase di scarico la risposta è comunque governata dal modulo elastico iniziale E .

Il modello, illustrato in Figura 13.2, è una drastica idealizzazione del comportamento effettivo, in quanto ignora la fase di incrudimento (pur se vi si riscontrano incrementi di sforzo non marginali) e non pone alcun limite all'entità della deformazione. Esso è tuttavia basato su dati attendibili e recepisce l'aspetto essenziale del comportamento duttile, segnatamente la capacità di deformarsi senza rottura in misura notevolissima, anche se a rigore non illimitata, una volta raggiunto un certo livello di sforzo.

Ai fini del calcolo a rottura sono peraltro sufficienti informazioni ancora più ridotte. La doppia disequaglianza (13.1) definisce solo un *intervallo ammissibile* per lo sforzo e non è necessario che al suo interno il comportamento sia effettivamente elastico-lineare. Non solo il valore di E si rivelerà ininfluente, ma tali risulteranno anche eventuali deviazioni dalla linearità nel comportamento per $|\sigma| < \sigma_0$. I comportamenti in Figura 13.3a, che tutti hanno in comune il valore di σ_0 , sono cioè equivalenti. È invece essenziale che la duttilità sia illimitata e che il comportamento sia irreversibile; ciò significa che per $|\sigma| = \sigma_0$ sono possibili deformazioni plastiche di entità arbitraria, ma solo nel verso concorde con quello di plasticizzazione. In effetti, il carico di collasso può essere calcolato idealizzando il comportamento con il legame *rigido-idealmente plastico* di Figura 13.3b, a volte assunto come base per la trattazione [1].

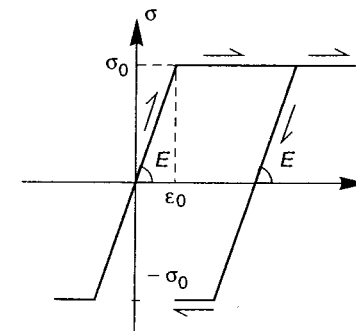


Figura 13.2

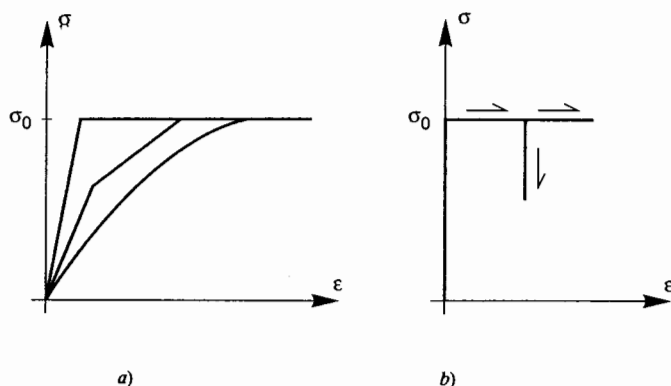


Figura 13.3

In generale, il *dominio ammissibile* per gli sforzi è definito da una o più disequazioni del tipo

$$\varphi_\alpha(\sigma_{ij}) \leq 0, \quad \alpha = 1, \dots, Y \quad (13.2)$$

che sostituiscono la (13.1). È immediato constatare l'equivalenza tra questa espressione e la condizione di plasticità di un materiale idealmente elasto-plastico, come definita nel Capitolo 3. Peraltro, non è ora necessario che all'interno del dominio il comportamento sia elastico-lineare; il dominio elastico istantaneo può evolvere, modificandosi con la storia di deformazione, purché tutti i suoi punti rispettino sempre le (13.2).

Come fatto nello stabilire il legame incrementale associato, si assume che il dominio (13.2) sia convesso. Se il punto rappresentativo dello stato di sforzo si trova sul limite del dominio, sono possibili incrementi di deformazione plastica in accordo con la legge di normalità (3.90). Precisamente

$$\dot{p}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^Y \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda}_\alpha \quad (13.3a)$$

$$\dot{\lambda}_\alpha \geq 0 \text{ se } \varphi_\alpha = 0 \text{ e } \dot{\varphi}_\alpha = 0, \quad \dot{\lambda}_\alpha = 0 \text{ altrimenti} \quad (13.3b)$$

L'alternativa (13.3b) riflette la natura irreversibile del comportamento.

13.1.2 IL COLLASSO PLASTICO

Gli esempi di calcolo sviluppati nel Capitolo 6 permettono di constatare come nel caso di plasticità ideale il carico sopportabile dalle strutture sia effettivamente delimitato superiormente. La pressione interna applicabile a un cilindro assialsimmetrico piano nelle deformazioni non può infatti eccedere il valore (6.73), così come il momento torcente su di una sezione non può superare un limite dipendente dalla forma della sezione stessa e valutabile, ad esempio, con l'ausilio dell'analogia del cumulo di sabbia.

In entrambi gli esempi, il collasso corrisponde a completa plasticizzazione, vale a dire al raggiungimento del limite di sforzo in tutti i punti della struttura, situazione che rende evidente come il carico non possa essere ulteriormente incrementato. Può però accadere (e solitamente accade) che parte della struttura si trovi ancora in campo elastico, ma in essa il livello di sforzo non possa aumentare senza violare l'equilibrio.

ESEMPIO 13.1 Si consideri la struttura reticolare in Figura 13.4. Tre aste di ugual sezione e costituite da materiale idealmente elasto-plastico (modulo elastico E , limite di snervamento uniaassiale σ_0 , Figura 13.2) sostengono un blocco rigido cui è applicato il carico P . Ci si propone di studiare l'evoluzione della struttura fino al collasso.

Indicando con N_i , $i = 1, 2, 3$, le azioni assiali nelle aste (positive se di trazione), l'equilibrio impone

$$N_1 + N_2 + N_3 = P \quad N_2 + 2N_3 = 0 \quad (13.4)$$

D'altra parte, la presenza del blocco rigido instaura tra gli allungamenti δ_i delle aste la relazione di congruenza

$$\delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3 = 0 \quad (13.5)$$

Fintanto che le aste si mantengono in campo elastico, tra allungamenti e azioni assiali sussistono i legami

$$\delta_1 = \frac{N_1 \ell}{EA} \quad \delta_2 = \frac{3N_2 \ell}{2EA} \quad \delta_3 = \frac{3N_3 \ell}{2EA} \quad (13.6)$$

Dal momento che lo sforzo non può eccedere il limite σ_0 , deve inoltre risultare

$$-A\sigma_0 \leq N_i \leq A\sigma_0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (13.7)$$

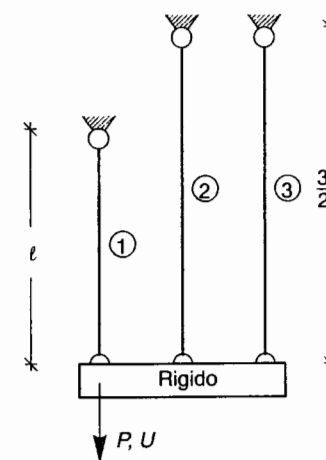


Figura 13.4

La struttura si trovi nel suo stato naturale per $P = 0$. Per piccoli valori del carico la sua risposta è elastica e si calcola risolvendo il sistema (13.4-6). Risulta

$$N_1 = \frac{15}{17} P \quad N_2 = \frac{4}{17} P \quad N_3 = -\frac{2}{17} P \quad (a)$$

$$U = \delta_1 = \frac{15}{17} \frac{P\ell}{EA} \quad \delta_2 = \frac{6}{17} \frac{P\ell}{EA} \quad \delta_3 = -\frac{3}{17} \frac{P\ell}{EA} \quad (b)$$

dove si è indicato con U lo spostamento del punto di applicazione del carico, che coincide con l'allungamento dell'asta ①.

Questa soluzione si mantiene valida fintanto che le azioni assiali (a) rispettano i limiti (13.7). In corrispondenza del carico

$$P_E = \frac{17}{15} A\sigma_0 = 1.133 A\sigma_0 \quad (13.8)$$

l'asta ① raggiunge il limite di snervamento a trazione ($N_1 = A\sigma_0$) le risorse elastiche della struttura si esauriscono. È adesso

$$N_{1E} = A\sigma_0 \quad N_{2E} = \frac{4}{15} A\sigma_0 \quad N_{3E} = -\frac{2}{15} A\sigma_0 \quad (13.9a)$$

$$U_E = \frac{\sigma_0 \ell}{E} \quad (13.9b)$$

La struttura può tuttavia sopportare carichi ulteriori. L'asta ① rifiuta incrementi di sforzo, ma fluisce plasticamente fornendo sempre il contributo $N_1 = A\sigma_0$. Gli incrementi di carico sono sopportati dalle due rimanenti aste, non ancora a snervamento, le cui azioni assiali, essendo ora fissato il valore di N_1 , si calcolano dalle sole equazioni di equilibrio (13.4). Risulta

$$N_1 = A\sigma_0 \quad N_2 = 2(P - A\sigma_0) \quad N_3 = -(P - A\sigma_0) \quad (c)$$

Gli allungamenti delle due aste ancora elastiche si ottengono dalle (13.6) e valgono

$$\delta_2 = \frac{3(P - A\sigma_0)\ell}{EA} \quad \delta_3 = -\frac{3(P - A\sigma_0)\ell}{2EA} \quad (d)$$

L'equazione di congruenza (13.5) permette quindi di calcolare lo spostamento

$$U = \delta_1 = 2\delta_2 - \delta_3 = \frac{15(P - A\sigma_0)\ell}{2EA} \quad (e)$$

Questa soluzione perde di validità quando il carico raggiunge il valore

$$P_L = \frac{3}{2} A\sigma_0 = 1.5 A\sigma_0 \quad (13.10)$$

in corrispondenza del quale risulta

$$N_{1L} = A\sigma_0 \quad N_{2L} = A\sigma_0 \quad N_{3L} = -\frac{1}{2} A\sigma_0 \quad (13.11a)$$

$$U_L = \frac{15\sigma_0 \ell}{4E} = 3.75 \frac{\sigma_0 \ell}{E} \quad (13.11b)$$

Anche l'asta ② è adesso a snervamento a trazione. L'asta ③ ha ancora risorse elastiche, che tuttavia non possono essere utilizzate per ulteriori incrementi da carico. Per $N_1 = N_2 = A\sigma_0$ le equazioni di equilibrio (13.4) non ammettono infatti altra soluzione che $N_3 = -0.5A\sigma_0$ e $P = 1.5A\sigma_0$. Il valore (13.10) rappresenta il carico di collasso della struttura.

Si osservi che nella situazione di collasso le deformazioni sono ancora di entità limitata. Nell'asta ① (la sola che abbia fluito plasticamente) risulta infatti

$$\epsilon_{1L} = \frac{U_L}{\ell} = 3.75 \epsilon_0 \quad \left(\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \right) \quad (f)$$

valore che certamente non pregiudica l'integrità di un materiale duttile. Il collasso non avviene quindi per rottura, bensì per l'impossibilità di soddisfare contemporaneamente l'equilibrio e le delimitazioni (13.7), imposte alle azioni assiali dal legame costitutivo.

Per $P = P_L$ la soluzione non è unica. Sono infatti compatibili con la congruenza e il legame costitutivo gli allungamenti seguenti

$$U = \delta_1 = \frac{15\sigma_0 \ell}{4E} + 2\eta \quad \delta_2 = \frac{3\sigma_0 \ell}{2E} + \eta \quad \delta_3 = -\frac{3\sigma_0 \ell}{4E} \quad (\eta \geq 0) \quad (g)$$

dove η è un valore arbitrario, purché non negativo. I contributi a esso proporzionali sono allungamenti puramente plastici nelle aste a snervamento, che a questo punto possono svilupparsi nel rispetto della congruenza pur se il livello di sforzo si mantiene ovunque costante. È questo il *meccanismo di collasso* (Figura 13.5) cui la struttura non è in grado di opporre resistenza. Il completo diagramma carico-spostamento è illustrato a tratto pieno in Figura 13.6; il pianerottolo orizzontale corrisponde al meccanismo, che consente spostamenti sotto carico costante.

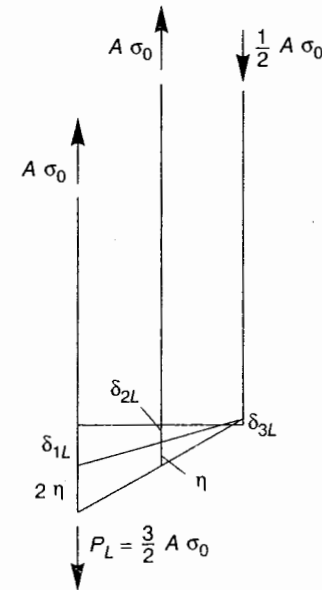


Figura 13.5

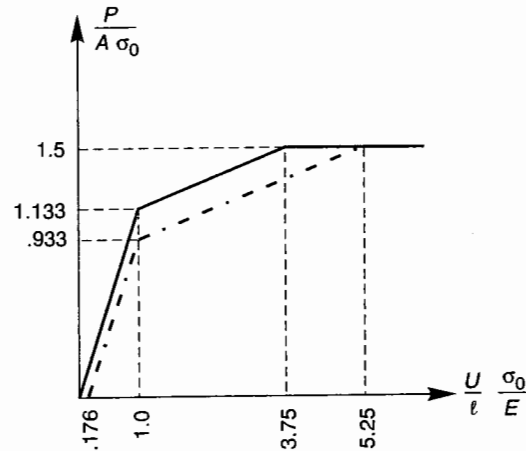


Figura 13.6

Il calcolo è stato svolto ipotizzando che per $P = 0$ la struttura si trovasse nel suo stato naturale, indeformato e privo di sforzi. Si vogliono ora esaminare le conseguenze di eventuali stati di coazione preesistenti all'applicazione del carico. Si supponga che l'asta ② sia in realtà più lunga del valore di riferimento $3l/2$; in particolare, che sia

$$l_2 = \frac{3}{2} l + \vartheta_2 \quad \vartheta_2 = \frac{3\sigma_0 l}{4E} \quad (h1, 2)$$

dove ϑ_2 rappresenta l'allungamento anelastico iniziale. Anche in assenza di carico, per collegare le tre aste al blocco rigido sono ora necessarie deformazioni elastiche. Considerando tali contributi, gli allungamenti si scrivono

$$\delta_{10} = \frac{N_{10}l}{EA} \quad \delta_{20} = \frac{3N_{20}l}{2EA} + \vartheta_2 \quad \delta_{30} = \frac{3N_{30}l}{2EA} \quad (i)$$

dove con N_{i0} si sono indicate le azioni assiali corrispondenti allo stato di coazione, che rispettano le equazioni di equilibrio (13.4) per $P = 0$. Tali relazioni, unitamente all'equazione di congruenza (13.5) scritta per le (i), conducono alla soluzione

$$N_{10} = \frac{3}{17} A\sigma_0 \quad N_{20} = -\frac{6}{17} A\sigma_0 \quad N_{30} = \frac{3}{17} A\sigma_0 \quad (j1)$$

$$U_0 = \delta_{10} = \frac{3\sigma_0 l}{17E} \quad \delta_{20} = \frac{15\sigma_0 l}{68E} \quad \delta_{30} = \frac{9\sigma_0 l}{34E} \quad (j2)$$

Le tre aste sono inizialmente elastiche. Per piccoli valori del carico, la soluzione si ottiene allora semplicemente sovrapponendo le (a), (b) alle (j). In particolare, per le azioni assiali risulta

$$N_1 = \frac{1}{17} (15P + 3A\sigma_0) \quad N_2 = \frac{1}{17} (4P - 6A\sigma_0) \quad N_3 = -\frac{1}{17} (2P - 3A\sigma_0) \quad (k)$$

L'asta ①, soggetta a trazione, è ancora la più sollecitata. Essa giunge a snervamento in corrispondenza del carico

$$P_E = \frac{14}{15} A\sigma_0 = .933 A\sigma_0 \quad (13.12)$$

quando le azioni assiali e lo spostamento valgono

$$N_{1E} = A\sigma_0 \quad N_{2E} = -\frac{2}{15} A\sigma_0 \quad N_{3E} = \frac{1}{15} A\sigma_0 \quad (l1)$$

$$U_E = \frac{\sigma_0 l}{E} \quad (l2)$$

Sotto ulteriori incrementi di carico, N_1 si mantiene costante. La soluzione in termini di sforzi è allora dettata dall'equilibrio e si identifica con le (c). Nelle due aste elastiche gli allungamenti sono ora

$$\delta_2 = \frac{3(P - A\sigma_0)l}{EA} + \vartheta_2 = \frac{3Pl}{EA} - \frac{9\sigma_0 l}{4E} \quad \delta_3 = -\frac{3Pl}{2EA} + \frac{3\sigma_0 l}{2E} \quad (m)$$

Dalla (13.5) consegue quindi lo spostamento

$$U = \delta_1 = 2\delta_2 - \delta_3 = \frac{15}{2} \frac{Pl}{EA} - \frac{6\sigma_0 l}{E} \quad (n)$$

Dal momento che le azioni assiali sono le stesse che nel caso precedente, il carico di collasso ha sempre il valore (13.10), che porta a snervamento anche l'asta ②. In tale situazione, le azioni assiali sono le (13.11a), mentre in luogo della (13.11b) si ha adesso

$$U_L = \frac{21\sigma_0 l}{4E} = 5.25 \frac{\sigma_0 l}{E} \quad (13.13)$$

Il diagramma carico-spostamento è ora la spezzata a tratto-punto in Figura 13.6, che per il valore (13.13) di U si ricongiunge al pianerottolo orizzontale corrispondente al meccanismo. Il calcolo evidenzia come la presenza di autotensioni influenzi la risposta della struttura, in particolare il *limite elastico* P_E , che nell'esempio diminuisce del 20%, ma non il valore del carico di collasso.

In ogni struttura sono di regola inizialmente presenti autotensioni; esse possono anche essere introdotte dalla storia di carico, qualora questa comporti plasticizzazioni locali. Esse sono raramente note a priori ed è quindi importante che, come l'esempio permette di riconoscere, il carico di collasso ne risulti indipendente. Il carico di collasso è anche indipendente dalle proprietà elastiche del materiale: un diverso valore di E o eventuali deviazioni dalla linearità nel comportamento per $|\sigma| < \sigma_0$ comportano, a parità di carico, spostamenti diversi, ma non intervengono sulla capacità portante di strutture duttili.

Pur nella sua semplicità, l'esempio mette in luce le caratteristiche essenziali del collasso plastico. Una volta raggiunto in un punto il limite di snervamento, il livello tensionale non può aumentare ma la duttilità del materiale permette di *ridistribuire gli sforzi*, coinvolgendo così zone che posseggono ulteriori risorse. Le condizioni di equilibrio pongono peraltro un limite alle possibilità di redistribuzione; al crescere del carico viene inevitabilmente raggiunta una situazione in cui l'equilibrio non può instaurarsi se non al prezzo di sforzi che eccedono in parte della struttura il limite del dominio (13.2) dei

valori ammissibili. Il carico non può allora essere ulteriormente incrementato e si verifica il collasso.

È del tutto evidente che se, indipendentemente dalla natura più o meno duttile del suo comportamento, il materiale non può superare un determinato livello di sforzo, *condizione necessaria* perché una struttura possa reggere determinati carichi è che essa sia in grado di equilibrarli nel rispetto di tale limitazione. L'aspetto più notevole del comportamento idealmente plastico è che tale condizione è anche *sufficiente*. La congruenza si rivela infatti ininfluente, in quanto nelle zone plastiche sono possibili deformazioni comunque in grado di ristabilirla: una struttura duttile certamente sopporta determinati carichi se esiste una soluzione puramente equilibrata e compatibile con i limiti di sforzo. Su questa osservazione si impernia il *metodo statico* per la ricerca del carico di collasso, che lo determina sulla base del solo equilibrio e del limite di resistenza del materiale, definito dalle disequaglianze (13.2). Vi è peraltro un aspetto duale, di natura cinematica. Nella situazione di collasso si instaura un cinematismo o *meccanismo di collasso*; diviene cioè possibile un atto di moto, nell'ipotesi di piccoli spostamenti di ampiezza arbitraria, che coinvolge velocità di deformazione puramente plastiche e congruenti e che può svilupparsi sotto carico costante. Il collasso avviene perché la struttura non è in grado di opporsi a spostamenti secondo il meccanismo. Lo studio delle condizioni che permettono a un cinematismo di attivarsi effettivamente è alla base del *metodo cinematico*.

Ovviamente l'esempio si limita a illustrare il fenomeno e non fornisce una dimostrazione di quanto affermato. Questa è contenuta nei *teoremi fondamentali del calcolo a rottura*, il cui studio costituisce l'oggetto di questo capitolo. Alla loro trattazione generale si premette quella relativa a sistemi di travi. È questo solo un caso particolare, anche se importante, che tuttavia fornisce un maggior supporto intuitivo, consentendo di cogliere facilmente il significato di concetti e operazioni che si ripropongono inalterati in ambito generale.

13.2 IL COLLASSO PLASTICO DI TRAVI INFLESSE

13.2.1 L'IPOTESI DI CERNIERA PLASTICA

13.2.1.1 Il modello

Il comportamento flessionale di sezioni simmetriche inflesse nel loro piano di simmetria è stato studiato nel Paragrafo 7.5. In particolare, per una sezione rettangolare $b \times h$ costituita da materiale idealmente elasto-plastico si è ottenuto il legame momento-curvatura

$$M(\chi) = \begin{cases} EI \chi & \text{se } \chi \leq \chi_e \\ M_e \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right] & \text{se } \chi \geq \chi_e \end{cases} \quad (13.14a)$$

$$M_e \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right] \quad \text{se } \chi \geq \chi_e \quad (13.14b)$$

dove

$$M_e = \frac{bh^2}{6} \sigma_0 \quad \chi_e = \frac{M_e}{EI} = \frac{2}{h} \varepsilon_0 \quad (13.15a, b)$$

indicano, rispettivamente, il momento e la curvatura al limite elastico, quando nelle fibre estreme risulta $|\varepsilon| = \varepsilon_0 = \sigma_0/E$. Si ricorda che tra la curvatura χ e la massima deformazione longitudinale (nelle fibre estreme) sussiste la relazione

$$\chi = \frac{2}{h} \varepsilon_{\max} \quad (13.15c)$$

per cui è anche

$$\frac{\chi}{\chi_e} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_0} \quad (13.15d)$$

La (13.14) è relativa al caso di sezione inizialmente vergine (priva di autotensioni) e ne rappresenta il comportamento sotto momenti monotonamente crescenti da zero. Il suo andamento è riportato in Figura 13.7, che riproduce la Figura 7.37 limitatamente al caso di incrudimento nullo. La capacità flessionale della sezione risulta delimitata superiormente dal valore

$$M_0 = \frac{3}{2} M_e = \frac{bh^2}{4} \sigma_0 \quad (13.16)$$

noto come *momento limite*. Esso può essere interpretato come il "carico di collasso" della sezione inflessa.

Il momento limite non viene mai a rigore raggiunto, ma solo avvicinato asintoticamente per $\chi \rightarrow \infty$, situazione che peraltro comporta, come la (13.15d) evidenzia, anche $\varepsilon_{\max} \rightarrow \infty$. Tuttavia valori di M molto prossimi a M_0 corrispondono a deformazioni del tutto accettabili in materiali reali, come si evince, oltre che dal grafico, dai valori numerici in Tabella 13.1: per $\varepsilon_{\max} = 10\varepsilon_0$ (deformazione ampiamente tollerabile in un materiale metallico) la (13.14) prevede infatti un momento inferiore solo dello 0.3% al valore limite. Per deformazioni ancora più elevate si può inoltre fare affidamento sul

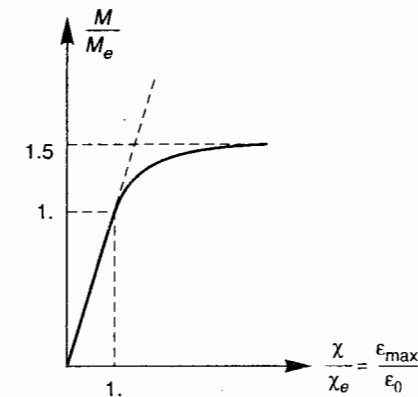


Figura 13.7

Tabella 13.1

$\frac{\chi}{\chi_e} = \frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_0}$	1.	2.	3.	5.	10.
$\frac{M}{M_0}$.667	.917	.963	.987	.997
$\frac{\chi}{M/EI}$	1.000	1.455	2.077	3.378	6.689

contributo dell'incrudimento, trascurato dal modello ma presente nel comportamento effettivo. La (13.16) definisce quindi una misura attendibile della capacità flessionale di una sezione rettangolare.

Nel Paragrafo 7.5.2, la (13.14) è stata utilizzata come legame costitutivo per studiare la risposta della trave in Figura 13.8a sotto carico crescente fino a collasso. Di tale risposta si discutono ora alcuni aspetti qualitativi, che non richiedono di riconsiderare i dettagli del calcolo.

La trave è isostatica. Indipendentemente dal legame costitutivo, il suo diagramma dei momenti è quindi quello illustrato in Figura 13.8b, che presenta il valore massimo $M_{max} = Pl/4$ in mezzaria. Le curvature a esso associate sono desumibili dalla (13.14). Si possono distinguere le due fasi seguenti.

1: $P \leq \frac{4M_e}{l} = \frac{8M_0}{3l}$. In tal caso è $M_{max} \leq M_e$ e tutte le sezioni si trovano in campo elastico. Dalla (13.14a) si ottiene allora $\chi(x) = \frac{M(x)}{EI}$ e la curvatura presenta un andamento triangolare simile a quello dei momenti (diagramma (a) in Figura 13.9).

2: $\frac{8M_0}{3l} < P < \frac{4M_0}{l}$. In un tratto attorno alla mezzaria della trave risulta adesso $M(x) > M_e$; in esso le curvature si discostano dall'andamento triangolare di una quantità pari alla differenza in ascisse tra la curva $M-\chi$, a tratto pieno, e la retta $M = EI\chi$ tratteggiata in Figura 13.7 (diagramma (b) in Figura 13.9). Per $P \rightarrow 4M_0/l$ la curvatura nella sezione di mezzaria diviene sempre più grande e teoricamente illimitata (diagramma (c)). Il valore $P_L = 4M_0/l$ rappresenta il carico di collasso della trave: il momento massimo ha infatti raggiunto il valore limite e non può ulteriormente aumentare, come l'equilibrio richiederebbe per carichi più elevati.

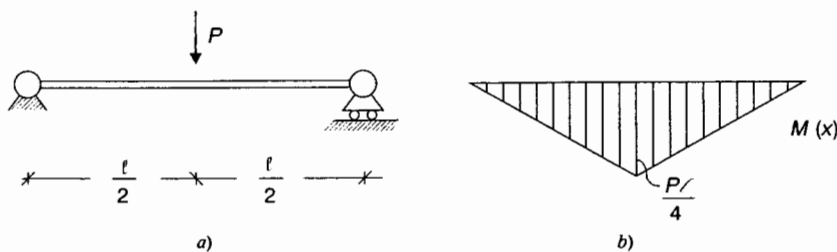


Figura 13.8

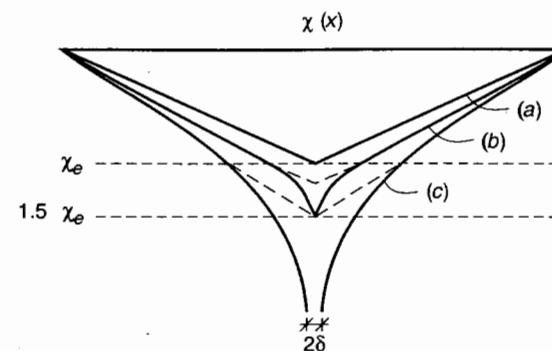


Figura 13.9

L'ampiezza dell'intervallo in cui le curvature si discostano dall'andamento triangolare elastico è anche notevole (pari a $l/3$ per $P = P_L$). Tuttavia il tratto in cui si riscontrano scostamenti significativi è drasticamente più limitato: curvature più che doppie rispetto a M/EI richiedono $M > .96M_0$ (Tabella 13.1), valore che si riscontra solo in prossimità del collasso e comunque solo in una piccola porzione di trave attorno alla mezzaria. Ai fini della rappresentazione del suo comportamento globale, appare quindi lecito supporre la trave ovunque elastica tranne che, nella situazione limite $M_{max} = M_0$, in un piccolo tratto di ampiezza 2δ attorno alla mezzaria (Figura 13.9). La quantità

$$\varphi = \int_{l/2-\delta}^{l/2+\delta} \chi dx \quad (13.17)$$

può essere interpretata come una rotazione relativa tra due tratti di trave che si mantengono elastici: per $M = M_0$, il mutuo incastro tra i due tratti viene sostituito da una cerniera. Questa osservazione è alla base dell'idealizzazione del comportamento flessionale nota come *cerniera plastica*. In luogo del diagramma di Figura 13.7, si ricorre a quello illustrato in Figura 13.10: esso prevede $M = EI\chi$ per $|M| < M_0$, mentre per $|M| = M_0$ il legame momento-curvatura viene sostituito da un legame momento-rotazione.

Rispetto a una cerniera strutturale, la cerniera plastica presenta due differenze. Innanzi tutto, pur consentendo rotazioni relative tra i due tratti che congiunge, essa trasmette un momento flettente costante, pari a $\pm M_0$; essa è inoltre una cerniera *unidirezionale*, che può ruotare solo nel verso di plasticizzazione, vale a dire compatibilmente con il segno del momento flettente. Il confronto con la Figura 13.3b mostra che il diagramma di Figura 13.10b rappresenta un comportamento rigido-idealmente plastico, di cui incorpora l'irreversibilità.

Il modello a cerniera plastica descrive il comportamento flessionale della sezione in termini della sola rigidità elastica EI (Figura 13.10a) e del suo momento limite M_0 (Figura 13.10b), senza che sia necessario definire la curva momento-curvatura. Questa non è solamente una semplificazione, ma permette anche di caratterizzare il comportamento per mezzo delle sole quantità veramente attendibili. Proprio con riferimento alla sezione rettangolare, si è visto infatti nel Capitolo 7 che la curva momento-curvatura

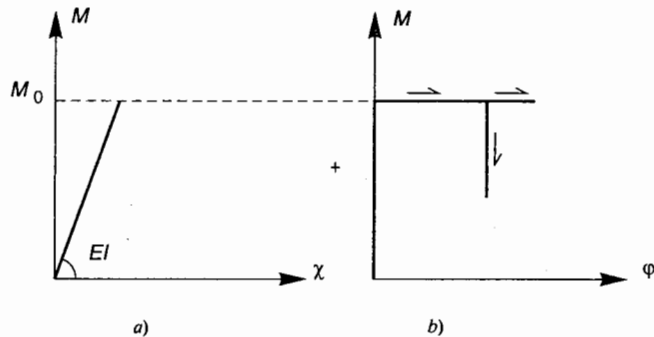


Figura 13.10

è influenzata dalle condizioni iniziali e dalla storia di carico, ad esempio da tensioni residue conseguenti allo scarico da una situazione plastica. Il momento limite si mantiene invece invariato.

13.2.1.2 Calcolo del momento limite di sezioni simmetriche

Il procedimento seguito per sezioni rettangolari può essere ripetuto per ogni sezione simmetrica e inflessa nel suo piano di simmetria. L'espressione analitica del legame momento-curvatura è formalmente più involuta, ma si calcola in modo concettualmente identico. Peraltro, il modello a cerniera plastica richiede solo il valore del momento limite e questo può essere calcolato in modo molto semplice.

Nella situazione limite, il nucleo elastico della sezione si è ridotto sino a svanire e le fibre sono tutte a snervamento, a trazione o compressione. Per una sezione rettangolare, tale stato tensionale è illustrato in Figura 13.11; esso ha risultante nulla ma equivale alla coppia M_0 , che può a questo punto essere calcolata per equilibrio. Risulta

$$M_0 = \sigma_0 b \frac{h}{2} \times \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{4} \sigma_0$$

in accordo con la (13.16).

In modo analogo si procede con riferimento ad altre sezioni. Se queste presentano un solo asse di simmetria, durante l'evoluzione elasto-plastica l'asse neutro, che separa le fibre tese da quelle compresse, trasla parallelamente a se stesso. La sua posizione finale è comunque fissata dalla condizione che, in assenza di azione assiale, le tensioni abbiano risultante nulla. Il calcolo è illustrato dagli esempi che seguono.

ESEMPIO 13.2 La sezione a I in Figura 13.12a è doppiamente simmetrica e l'asse neutro è pertanto ancora baricentrico nella situazione limite. Il relativo stato tensionale, illustrato in Figura 13.12b, equivale alla coppia

$$M_0 = \sigma_0 m t (h-t) + \sigma_0 b \left(\frac{h}{2} - t\right)^2 = \sigma_0 \left[m t (h-t) + b \left(\frac{h^2}{4} - h t + t^2\right) \right] \quad (13.18)$$

che rappresenta il momento limite della sezione.

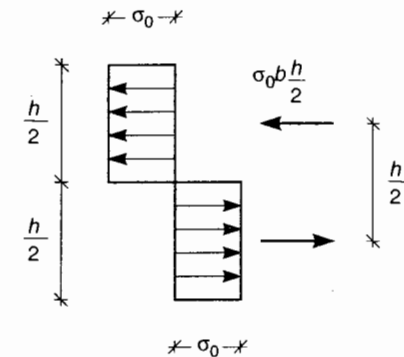


Figura 13.11

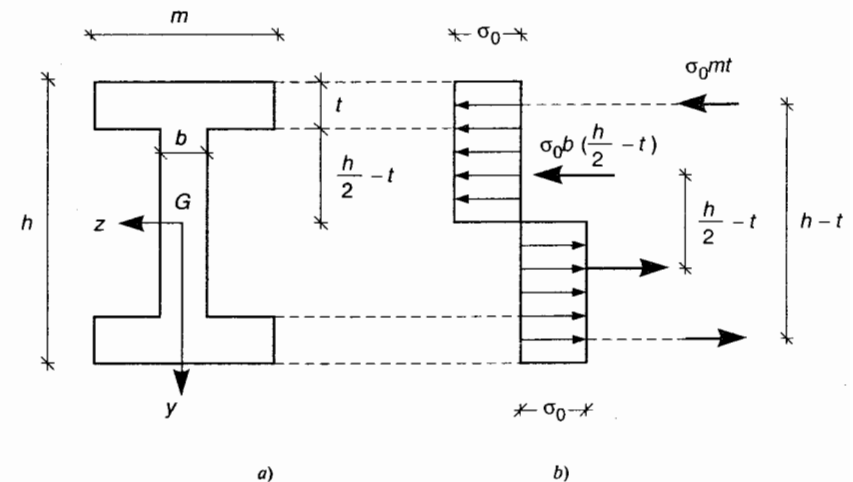


Figura 13.12

ESEMPIO 13.3 La sezione a T in Figura 13.13a è inflessa nel suo piano di simmetria. Se, come sin qui sempre ipotizzato, il materiale è simmetrico, nella situazione limite l'asse neutro si colloca nella posizione indicata in figura, tale per cui gli sforzi a trazione e compressione insistono su aree uguali, dando luogo a risultante nulla. L'equilibrio consente il calcolo del momento limite (Figura 13.13b). Risulta

$$M_0 = \sigma_0 3a^2 \times 2a = 6a^2 \sigma_0 \quad (13.19)$$

Il momento M_e al limite elastico corrisponde alla situazione in cui la tensione di snervamento σ_0 viene raggiunta nella fibra più sollecitata. Si è visto che esso è convenientemente espresso nella forma

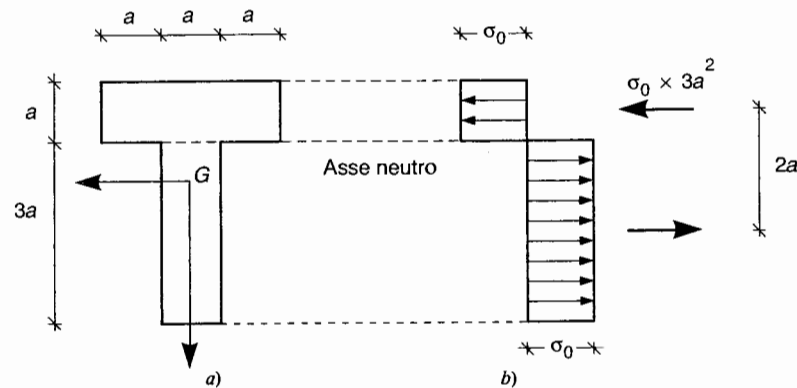


Figura 13.13

$$M_e = W\sigma_0 \quad (13.20a)$$

dove W (dimensionalmente una lunghezza al cubo) è il modulo di resistenza elastico, definito nel Paragrafo 7.4. In modo analogo, si può porre

$$M_0 = Z\sigma_0 \quad (13.20b)$$

dove si è indicato con Z la proprietà geometrica della sezione nota come *modulo plastico*. Per la sezione rettangolare e le due considerate negli esempi precedenti, il suo valore è immediatamente deducibile dalle espressioni dei rispettivi momenti limite. Il rapporto adimensionale

$$f = \frac{M_0}{M_e} = \frac{Z}{W} \quad (13.21)$$

è noto come *fattore di forma*. Per la sezione rettangolare risulta $f = 1.5$, il che indica come la duttilità consenta di sopportare un momento del 50% superiore al valore al limite elastico.

Per la sezione a I nell'Esempio 13.2, il modulo plastico si evince dalla (13.18) e vale

$$Z = mt(h-t) + b\left(\frac{h^2}{4} - ht + t^2\right) \quad (a1)$$

mentre W risulta

$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 + \frac{m-b}{h}\left(h^2t - 2ht^2 + \frac{4}{3}t^3\right) \quad (a2)$$

Se gli spessori dell'anima e delle flange sono piccoli, è lecito trascurare i termini di ordine superiore al primo in b e t . Le (a) divengono allora

$$Z = mht\left(1 + \frac{1}{4}\frac{bh}{mt}\right) \quad W = mht\left(1 + \frac{1}{6}\frac{bh}{mt}\right) \quad (b)$$

e dalla (13.21) si ottiene

$$f = \frac{1 + \frac{1}{4}\frac{bh}{mt}}{1 + \frac{1}{6}\frac{bh}{mt}} \quad (c)$$

Tale valore risulta compreso nell'intervallo $1 \leq f \leq 1.5$; l'estremo superiore corrisponde a $t = 0$, quando la sezione si riconduce al rettangolo costituito dalla sola anima. $f = 1$ corrisponde invece a $b = 0$ e configura una sezione limite, detta *putrella ideale*, in cui l'anima (pur necessaria per conferire solidarietà alla sezione trasmettendo eventuali tensioni tangenziali) non contribuisce alla resistenza flessionale e le flange sono così sottili da non permettere alcuna redistribuzione di sforzo sul loro spessore. Tale sezione è *staticamente determinata* e non presenta risorse plastiche. Per profili a I di uso corrente, f è compreso nell'intervallo $1.1 \leq f \leq 1.2$.

I valori dei fattori di forma per diverse geometrie sezionali sono riportati in Tabella 13.2. Si può osservare come quelli più elevati corrispondano a sezioni raramente utilizzate in flessione. Va infatti sottolineato che un alto valore di f , pur denotando cospicue risorse plastiche, non è affatto indice di elevata resistenza flessionale. Geometrie che sfruttano bene il materiale presentano ridotti margini di redistribuzione una volta esaurita la fase elastica. Fattori di forma elevati sono tipici di sezioni che addensano il materiale attorno all'asse neutro o il cui baricentro non è equidistante dalle fibre estreme; i picchi di sforzo in fase elastica coinvolgono allora solo poche fibre e la maggior parte del materiale risulta scarsamente sollecitata. Tali sezioni possono redistribuire gli sforzi in misura notevole e presentano un incremento di capacità flessionale percentualmente elevato, che va però riferito ad un limite elastico modesto in relazione al materiale impiegato.







13.2.1.3 Sollecitazioni composte

Si considerano adesso concomitanti azioni flettenti e assiali, iniziando ancora con l'esame della sezione rettangolare. Essa rimane in campo elastico fino a che non viene raggiunto il confine del dominio (7.101), definito dalle disequazioni

$$\pm \frac{N}{N_e} \pm \frac{M}{M_e} \leq 1 \quad (13.22)$$

dove N_e e M_e sono i valori delle azioni interne che individualmente esauriscono le risorse elastiche della sezione. Nel caso in esame, M_e è espresso dalla (13.15a) e $N_e = bh\sigma_0$. In presenza di sola azione assiale $N = \pm N_e$, tutte le fibre risultano egualmente sollecitate da $\sigma = \pm \sigma_0$ e l'esaurimento delle risorse elastiche coincide con quello della capacità portante. In pura flessione le risorse plastiche consentono invece alla sezione di sopportare un momento superiore anche del 50% a M_e . Si vuole esaminare il caso di azioni combinate.

Tabella 13.2

Sezione		 spessore sottile				
f	1.1-1.2	1.27	1.5	1.6-1.8	1.70	2.0

Nella situazione limite tutte le fibre hanno sforzo pari a $\pm\sigma_0$, con asse neutro posizionato a una distanza λ dal baricentro (Figura 13.14a). Decomponendo gli sforzi come illustrato in Figura 13.14b, c, è facile constatare che la risultante e il momento risultante degli sforzi nella situazione limite risultano

$$N = 2b\lambda\sigma_0 \quad M = b\left(\frac{h^2}{4} - \lambda^2\right)\sigma_0 \quad (13.23)$$

Eliminando λ e ponendo

$$N_0 = N_e = bh\sigma_0 \quad M_0 = \frac{1}{4}bh^2\sigma_0 \quad (13.24a, b)$$

si ottiene

$$M = M_0\left[1 - \left(\frac{N}{N_0}\right)^2\right] \quad (13.25a)$$

La (13.25a) definisce nel piano (N, M) la *curva limite* della sezione, luogo delle combinazioni di azioni interne che ne esauriscono le risorse. Essa è influenzata da un cambiamento di segno del momento, ma non dell'azione assiale che compare al quadrato: la curva limite di una sezione rettangolare è pertanto rappresentata dalle due parabole

$$\pm \frac{M}{M_0} + \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 = 1 \quad (13.25b)$$

Essa è illustrata in Figura 13.15, con il relativo dominio elastico. Valori di M e N compresi tra quest'ultimo e la curva limite comportano deformazioni plastiche nella sezione, ma non ne eccedono la capacità portante.

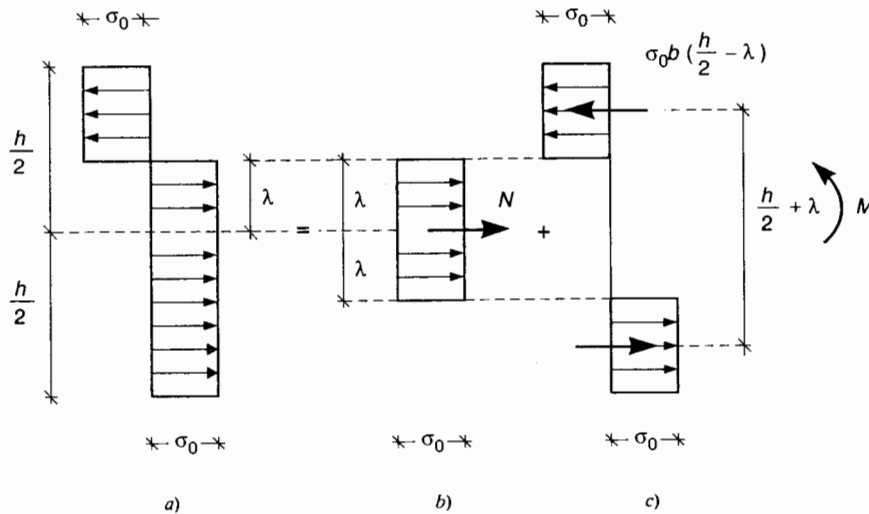


Figura 13.14

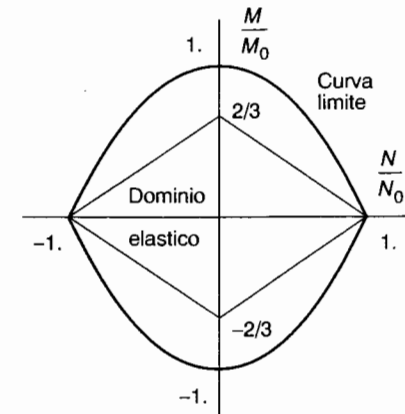


Figura 13.15

Nella (13.25a) il termine in parentesi quadra è interpretabile come il coefficiente che misura la riduzione della resistenza flessionale dovuta alla presenza di un'azione assiale (M_0 , come definito dalla (13.24b), è infatti il momento limite della sezione rettangolare). Si osservi che la curva limite presenta tangente orizzontale per $N = 0$: valori di N/N_0 non troppo elevati causano quindi riduzioni modeste (ad esempio, per $N = .2N_0$ si ottiene $M = .96M_0$). Questa caratteristica risulta comune a tutte le *sezioni doppiamente simmetriche*, anche se le espressioni delle curve limite sono diverse dalle (13.25). Per sezioni con un solo asse di simmetria la curva limite presenta invece una dipendenza dal segno di N qualitativamente analoga a quella riscontrata nel Paragrafo 7.4 con riferimento al limite del dominio elastico. Due andamenti tipici sono illustrati in Figura 13.16.

L'osservazione è importante in quanto le membrature dei telai sono di regola soggette ad azioni assiali modeste in rapporto a N_0 . In sezioni a doppia simmetria è allora legittimo ignorarne l'effetto e assumere una resistenza flessionale sempre pari a M_0 , riconducendo la rappresentazione del comportamento della sezione al modello a cernie-

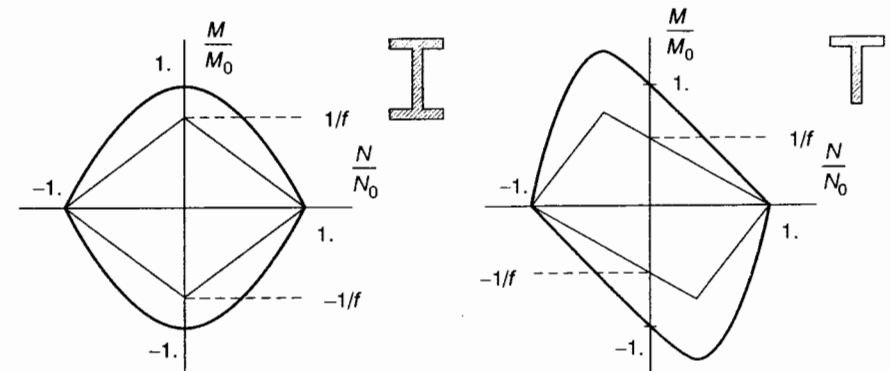


Figura 13.16

ra plastica. L'ipotesi è a volte adottata anche per sezioni a semplice simmetria, ma appare molto meno giustificata. Esistono ovviamente strutture, tipicamente gli archi, soggette ad azioni assiali notevoli, che influiscono in modo determinante sulla resistenza della sezione e rendono necessario considerare la curva limite nella sua interezza.

Più complessa è la valutazione degli effetti delle azioni taglianti in termini di riduzione di momento limite, che comunque risultano in generale dello stesso ordine di quelli, già ritenuti trascurabili, sul limite elastico. Si può quindi concludere che in molte circostanze la resistenza ultima della sezione di travi piane è governata dal solo momento limite M_0 . La trattazione che segue sarà limitata a questo ambito.

Qualora l'ipotesi di cerniera plastica non sia applicabile e occorra considerare l'intera curva limite, il problema si riconduce a quello generale che verrà affrontato successivamente alle travi piane. In modo concettualmente analogo si trattano travi non sollecitate nel piano, come situazioni di flessione deviata (che in ambito elasto-plastico includono anche l'inflessione in un piano principale d'inerzia non di simmetria) o di torsione. A differenza dei tagli, i momenti torcenti (e, in profili aperti, i bimomenti) influenzano significativamente la resistenza della sezione. Il dominio degli sforzi ammissibili è allora uno spazio pluridimensionale, delimitato non più da una curva ma da una superficie limite.

13.2.2 ANALISI EVOLUTIVA DI TRAVI IDEALMENTE ELASTO-PLASTICHE

Se il comportamento della sezione è idealizzato col modello in Figura 13.10, la trave di Figura 13.8a si mantiene elastica fino a $P = 4M_0/\ell$, quando il momento in mezzaria raggiunge il valore limite. Si forma allora una cerniera plastica, illustrata in Figura 13.17a come una cerniera strutturale, che trasmette i momenti limite, indicati in figura come ulteriori *carichi esterni*. Per semplicità, si usa spesso l'equivalente rappresentazione in Figura 13.17b, dove la cerniera plastica è annerita; la presenza dei momenti limite è adesso sottintesa e il loro verso, concorde con quello delle rotazioni consentite, si desume dal simbolo adiacente la cerniera stessa, che identifica le fibre tese.

In questo esempio, $P_L = 4M_0/\ell$ è il *carico di collasso* della struttura in quanto, come già osservato, per valori più elevati l'equilibrio richiederebbe un momento in mezzaria maggiore di M_0 , incompatibile con il comportamento di Figura 13.10b. Il raggiungimento della situazione limite è anche evidenziato dalla labilità della struttura in Figura 13.17a, che consente un atto di moto rigido (*meccanismo di collasso*); i momenti M_0 nella cerniera permettono di equilibrare P_L , ma non carichi superiori.

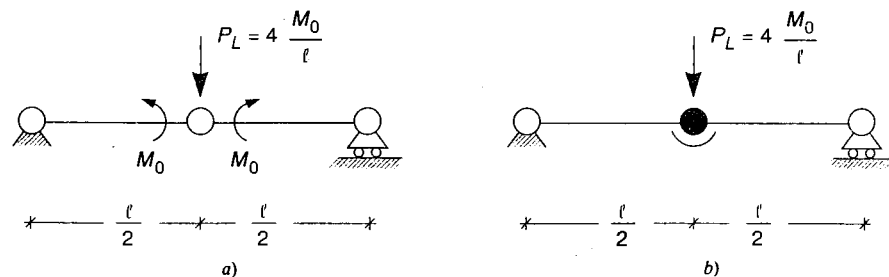


Figura 13.17

Questo comportamento è comune a tutti i sistemi di travi isostatici, i cui momenti flettenti sono univocamente determinati dall'equilibrio. Il collasso corrisponde allora al raggiungimento del momento limite in una sezione, con conseguente formazione di una cerniera plastica che trasforma la struttura in un meccanismo: una struttura isostatica non ha altre risorse plastiche che quelle delle sezioni delle travi di cui è costituita. Una struttura iperstatica invece, quando il momento flettente raggiunge per la prima volta il valore limite in una sezione e si forma una cerniera plastica, può ancora sostenere incrementi di carico ridistribuendo i momenti. Si attivano successivamente ulteriori cerniere plastiche e il collasso si verifica solo quando queste vengono a formare un meccanismo.

Le fasi dell'evoluzione vengono ora illustrate da alcuni esempi. Le travi sono soggette a *carichi base*, amplificati da un *moltiplicatore* μ di cui si vuole determinare il valore che porta la struttura a collasso. Negli esempi, ai carichi base verranno attribuiti valori di comodo; se però essi corrispondono a una condizione realistica, il moltiplicatore di collasso assume il significato di *coefficiente di sicurezza* della struttura nei confronti della crisi. Esso verrà indicato con s .

ESEMPIO 13.4 Si analizza la risposta della trave a sezione costante in Figura 13.18a al crescere dell'intensità del carico trasversale, il cui valore base è assunto pari a $p_0 = M_0/\ell^2$. In campo elastico, il diagramma dei momenti è quello illustrato in Figura 13.18b; i valori di picco si riscontrano negli incastri, dove risulta

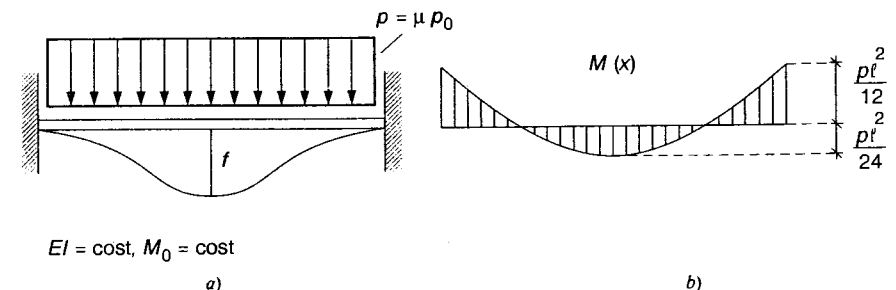
$$M_{inc} = -\frac{p\ell^2}{12} = -\mu \frac{p_0\ell^2}{12} = -\mu \frac{M_0}{12} \tag{d1}$$

Sempre in campo elastico, lo spostamento in mezzaria vale

$$f = v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{384} \frac{p\ell^4}{EI} = \frac{\mu}{384} \frac{M_0\ell^2}{EI} \tag{d2}$$

Per l'ipotesi di cerniera plastica, la trave si mantiene elastica fino al raggiungimento del momento limite nella sezione più sollecitata, nel caso in esame contemporaneamente nei due incastri. Imponendo $M_{inc} = -M_0$, dalla (d1) si ottiene per il *moltiplicatore al limite elastico* μ_E il valore

$$\mu_E = 12 \quad \left(p_E = 12 \frac{M_0}{\ell^2} \right) \tag{e1}$$



$EI = \text{cost}, M_0 = \text{cost}$

Figura 13.18

cui corrisponde la freccia

$$f_E = \frac{M_0 \ell^2}{32EI} \quad (e2)$$

A questo punto le sezioni di incastro rifiutano incrementi di momento. Esse però consentono rotazioni a momento costante e quindi una redistribuzione delle azioni interne. La situazione relativa a $\mu > \mu_E$ è visualizzata in Figura 13.19. Il carico può essere incrementato fino a che non viene raggiunto il momento limite in un'altra sezione, nella fattispecie in mezzaria. Ciò avviene per il valore s del moltiplicatore definito dalla condizione

$$M_0 = M \left(\frac{\ell}{2} \right) = \frac{M_0}{2} + (s - \mu_E) \frac{\rho_0 \ell^2}{8} = \frac{M_0}{2} + (s - 12) \frac{M_0}{8}$$

da cui si ottiene

$$s = 16 \quad \left(\rho_L = 16 \frac{M_0}{\ell^2} \right) \quad (f1)$$

L'incremento di freccia può essere calcolato elasticamente, considerando la risposta della trave doppiamente incernierata sotto il carico $(s - \mu_E)\rho_0$. Risulta

$$f_L - f_E = \frac{5}{384} (s - \mu_E) \frac{\rho_0 \ell^4}{EI}$$

e quindi, ricordando le (e) e la (f1)

$$f_L = \frac{1}{12} \frac{M_0 \ell^2}{EI} \quad (f2)$$

Il moltiplicatore è stato indicato con s perché si è formato il meccanismo costituito dalle tre cerniere allineate in Figura 13.20, che permette un atto di moto. I momenti limite nella cerniere consentono alla trave di equilibrare nella sua configurazione indeformata il carico $s\rho_0$, ma non carichi più elevati. s rappresenta pertanto il *moltiplicatore di collasso* della struttura. I valori che le diverse quantità assumono nella situazione di collasso incipiente sono contraddistinti dall'indice ().

La risposta della trave è sintetizzata dalla spezzata a tratto pieno in Figura 13.21. Rispetto al limite elastico, la capacità portante è aumentata del 33%. L'incremento è dovuto all'iperstaticità della struttura, che permette di redistribuire i momenti nel ri-

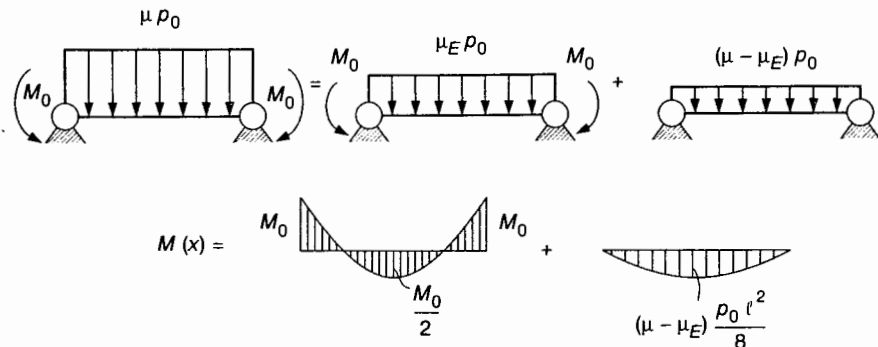


Figura 13.19

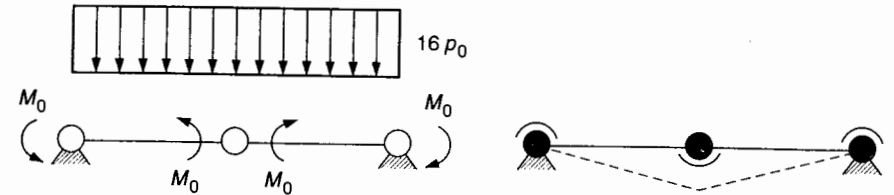


Figura 13.20

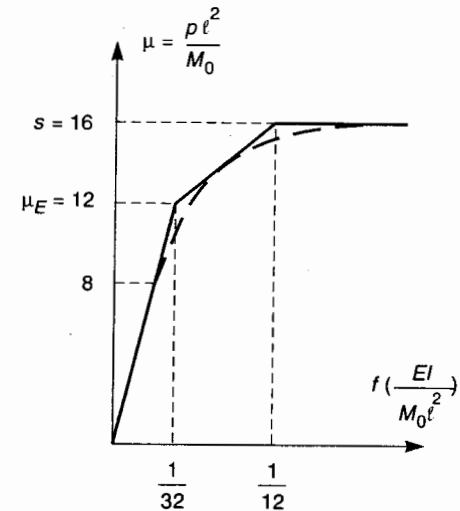


Figura 13.21

spetto dell'equilibrio, possibilità che la duttilità del materiale consente effettivamente di sfruttare. Il pianerottolo per $\mu = s$ indica che, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, al meccanismo sono associati incrementi di freccia di entità arbitraria sotto carico costante. La trave possiede in realtà ulteriori risorse, dovute alle azioni di membrana che si instaurano in fase post-collasso, che tuttavia solo per spostamenti non piccoli concorrono a equilibrare i carichi trasversali.

Un'analisi che tenesse conto dell'effettivo diagramma momento-curvatura della sezione, porterebbe al risultato qualitativamente rappresentato dalla curva tratteggiata in Figura 13.21: il limite elastico si raggiungerebbe per $M_{inc} = -M_e$ (nel caso di sezione rettangolare, per $\mu = 8$); gli spostamenti anelastici risulterebbero maggiori, ma in modo significativo solo in prossimità del collasso; il valore di s resterebbe inalterato. Benché drastica, l'ipotesi di cerniera plastica è quindi adeguata a rappresentare le caratteristiche essenziali della risposta della trave.

ESEMPIO 13.5 La trave di sezione costante in Figura 13.22a è soggetta a un carico concentrato di valore base $P_0 = M_0/\ell$. In campo elastico, il diagramma dei momenti è quello indicato in Figura 13.22b, dove sono riportati anche i valori caratteristici. In valore assoluto, il momento è massimo nella sezione di incastro A. La fase elastica si esaurisce quindi quando risulta $M_A = -M_0$. Il relativo moltiplicatore del carico vale

$$\mu_E = \frac{56}{9} = 6.222 \quad (g1)$$

È adesso

$$M_A(\mu_E) = -M_0, \quad M_B(\mu_E) = \frac{8}{9} M_0 = .889M_0, \quad M_C(\mu_E) = -\frac{1}{3} M_0 = -.333M_0 \quad (g2)$$

Nei confronti di incrementi di carico $\Delta\mu_2 P_0$ ($\Delta\mu_2 = \mu_2 - \mu_E$), la sezione A si comporta come una cerniera, ruotando nel verso di plasticizzazione. La risposta della struttura si desume dalla soluzione elastica dello schema illustrato in Figura 13.22c. I momenti flettenti $\Delta M_2(x)$ vanno sovrapposti a quelli presenti per $\mu = \mu_E$, i cui valori caratteristici sono dati dalle (g2). La sezione B, già più sollecitata, subisce anche gli incrementi maggiori e questa seconda fase si esaurisce per $M_B = M_0$. Il relativo moltiplicatore del carico si calcola dalla condizione

$$M_B(\mu_2) = M_B(\mu_E) + \Delta M_{B2}(\Delta\mu_2) = M_0$$

e risulta

$$\Delta\mu_2 = \frac{64}{117}, \quad \mu_2 = \mu_E + \Delta\mu_2 = \frac{88}{13} = 6.769 \quad (h1)$$

Nelle tre sezioni critiche è adesso

$$M_A(\mu_2) = -M_0, \quad M_B(\mu_2) = M_0, \quad M_C(\mu_2) = -\frac{1}{3} M_0 - \frac{3}{32} \Delta\mu_2 M_0 = -\frac{5}{13} M_0 = -.385M_0 \quad (h2)$$

Sotto ulteriori incrementi $\Delta\mu_3 P_0$ anche la sezione B si comporta come una cerniera e la trave si riconduce allo schema isostatico in Figura 13.22d. Tale fase termina quando è anche $M_C = -M_0$ e la struttura si trasforma in un meccanismo; la condizione

$$M_C(\mu_3) = M_C(\mu_2) + \Delta M_{C3}(\Delta\mu_3) = -M_0$$

determina per il moltiplicatore di collasso il valore

$$\Delta\mu_3 = \frac{16}{13}, \quad \mu_3 = \mu_2 + \Delta\mu_3 = 8.0 = s \quad (i)$$

Il meccanismo di collasso è riportato in Figura 13.22e. La risorsa plastica della struttura, misurata dal rapporto tra i moltiplicatori s (di collasso) e μ_E (al limite elastico), risulta in questo caso

$$\frac{s}{\mu_E} = 1.286 \quad (j)$$

La redistribuzione dei momenti conseguente alla successiva formazione delle cerniere plastiche è illustrata in Figura 13.23. I relativi valori di picco sono riassunti in Tabella 13.3.

Come gli esempi illustrano, il modello a cerniera plastica riconduce l'analisi evolutiva di travi a una sequenza di soluzioni elastiche, riferite a strutture il cui grado di iperstaticità viene man mano degradato dall'attivazione delle successive cerniere, fino alla formazione di un meccanismo. A rigore, tali soluzioni dovrebbero includere anche la valutazione del regime deformativo, onde assicurare che le rotazioni nelle cerniere siano

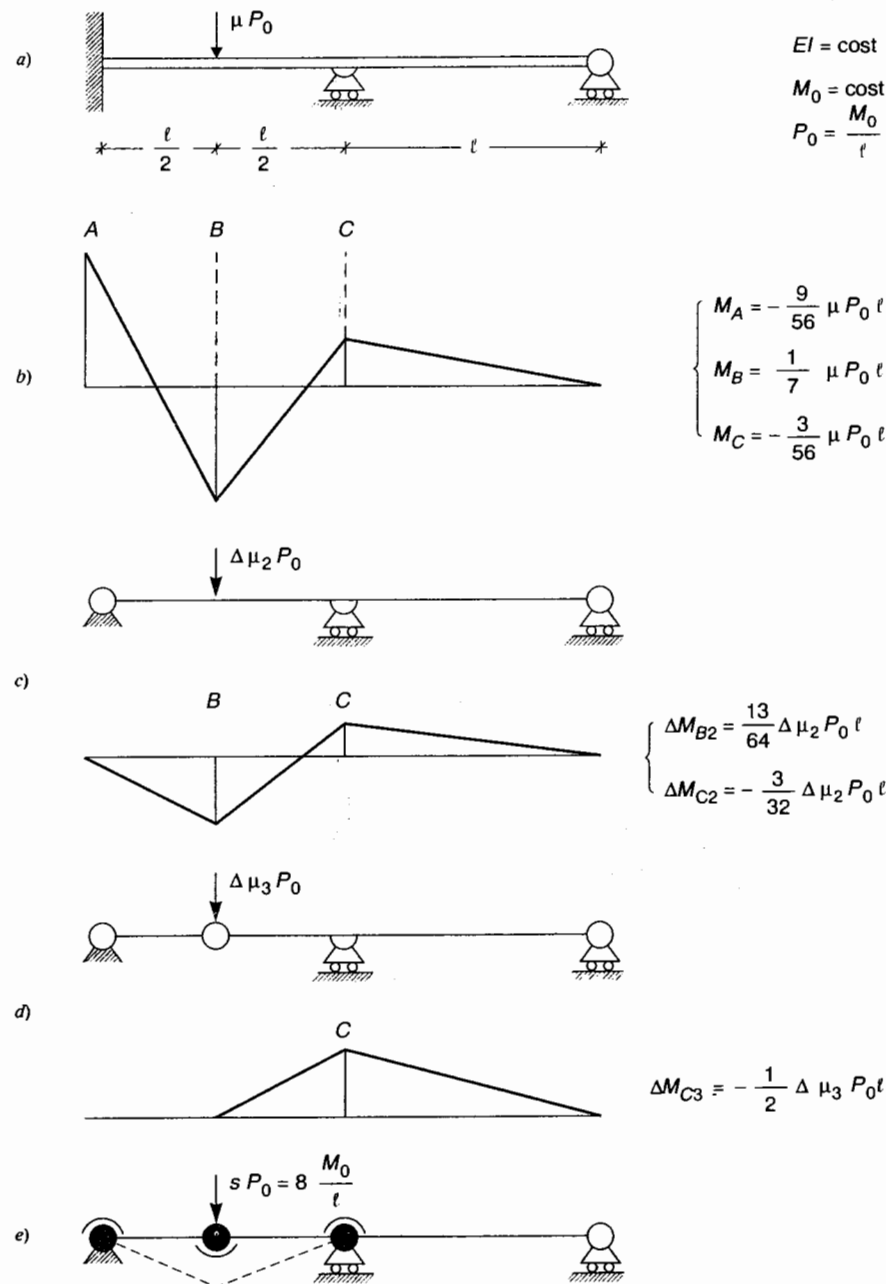


Figura 13.22

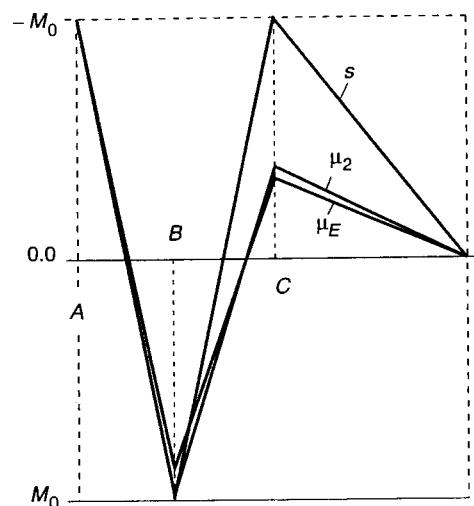


Figura 13.23

Tabella 13.3

μ	M_A/M_0	M_B/M_0	M_C/M_0
$\mu_E = 6.222$	-1.	0.889	-0.333
$\mu_2 = 6.769$	-1.	1.	-0.385
$s = 8.000$	-1.	1.	-1.

compatibili con il verso concesso dalla plasticizzazione. Stante la natura irreversibile delle deformazioni plastiche, in caso contrario si verificherebbe infatti uno scarico elastico: la sezione tornerebbe a comportarsi come un mutuo incastro e il momento decrescerebbe (in valore assoluto) dal valore limite precedentemente raggiunto. Questa eventualità, caratteristica di ogni comportamento elasto-plastico, è però rara in sistemi di travi soggetti a carichi proporzionalmente crescenti (se analizzati nell'ipotesi di cerniera plastica), anche se si danno casi in cui si verifica [2].

Va comunque ricordato che l'evoluzione elasto-plastica della struttura è influenzata dalle condizioni iniziali e dalla storia di carico. Negli esempi, si sono considerati carichi monotonamente crescenti applicati sulla struttura nel suo stato naturale, privo cioè di autotensioni iniziali, e le soluzioni trovate sono valide limitatamente a queste ipotesi. Le successive fasi dell'evoluzione (spostamenti, limite elastico, sequenza di formazione delle cerniere plastiche) sarebbero diverse in altre situazioni. Il carico di collasso è però indipendente da questi effetti (anche eventuali scarichi di sezioni precedentemente plasticizzate non ne alterano il valore). Esso rappresenta l'informazione essenziale che si richiede al calcolo e può essere ottenuto senza considerare l'intera evoluzione della struttura, come ora si passa a discutere.

13.2.3 IL MECCANISMO DI COLLASSO

Il collasso plastico è associato alla formazione di un numero di cerniere sufficiente a trasformare la struttura (o una sua parte) in un meccanismo che, pur permettendo ancora di equilibrare i carichi applicati se questi si mantengono costanti, rende possibile un atto di moto rigido. Questo è caratterizzato da velocità trasversali $\dot{v}_c(x)$ e velocità di rotazione $\dot{\varphi}_{kc}$ nelle $k = 1, \dots, K$ cerniere plastiche, positive se nell'atto di moto si allungano le fibre tese da momenti positivi. Con riferimento all'Esempio 13.4 precedente, l'atto di moto è illustrato in Figura 13.24a e prevede

$$\dot{v}_c(x) = \begin{cases} 2 \frac{x}{\ell} \dot{f}_c & 0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \dot{f}_c & \frac{\ell}{2} \leq x \leq \ell \end{cases} \quad (k1)$$

$$\dot{\varphi}_{1c} = \dot{\varphi}_{3c} = -\frac{2}{\ell} \dot{f}_c, \quad \dot{\varphi}_{2c} = \frac{4}{\ell} \dot{f}_c \quad (k2)$$

dove $\dot{f}_c = \dot{v}_c(\ell/2)$ è la velocità trasversale della cerniera in mezzaria.

Nella situazione di collasso incipiente l'equilibrio ancora sussiste. I momenti flettenti $M_c(x)$ a collasso sono quindi legati ai carichi base amplificati da s dall'equazione indefinita di equilibrio per la trave

$$-M_c''(x) = sp_0 \quad (13.26)$$

oltre che da eventuali condizioni di equilibrio al contorno. Sempre con riferimento all'Esempio 13.4, è infatti (Figura 13.24b)

$$M_c(x) = M_0 \left(-1 + 8 \frac{x}{\ell} - 8 \frac{x^2}{\ell^2} \right) \quad (\ell1)$$

ed è immediato constatare che risulta

$$-M_c''(x) = 16 \frac{M_0}{\ell^2} = sp_0 \quad (\ell2)$$

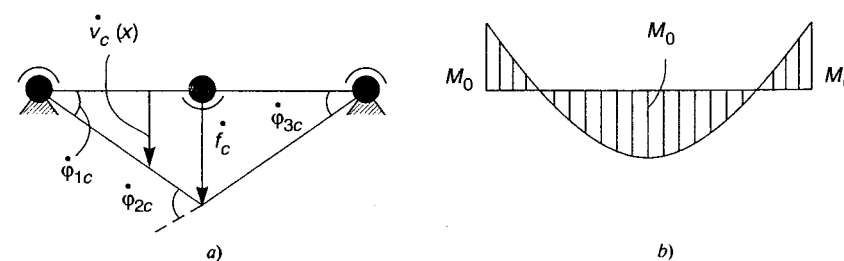


Figura 13.24

L'equazione di equilibrio (13.26) è riferita alla configurazione indeformata della struttura. D'altra parte, l'atto di moto concesso dal meccanismo può essere riguardato come virtuale e riferito alla stessa configurazione. Il principio delle velocità virtuali stabilisce allora

$$s \int p_0 \dot{v}_c dx = \sum_k M_c(x_k) \dot{\varphi}_{kc} \quad (m)$$

dove l'integrale si intende esteso a tutta la struttura. Si osservi che anche se la distribuzione $M_c(x)$ dei momenti a collasso non fosse nota, sarebbero comunque tali i valori nelle cerniere plastiche. Il legame in Figura 13.10 prevede infatti

$$M_c(x_k) = M_{0k} = \begin{cases} M_0 & \text{se } \dot{\varphi}_{kc} > 0 \\ -M_0 & \text{se } \dot{\varphi}_{kc} < 0 \end{cases} \quad (13.27)$$

La (m) allora diviene

$$s \int p_0 \dot{v}_c dx = \sum_k M_{0k} \dot{\varphi}_{kc} \quad (13.28a)$$

da cui si ottiene

$$s = \frac{\sum_k M_{0k} \dot{\varphi}_{kc}}{\int p_0 \dot{v}_c dx} \quad (13.28b)$$

Questa relazione consente il calcolo di s una volta noto il meccanismo di collasso. Nel particolare esempio in esame, per le (k) risulta

$$\int_0^l p_0 \dot{v}_c dx = p_0 \frac{l}{2} \dot{f}_c, \quad \sum_k M_{0k} \dot{\varphi}_{kc} = 8 \frac{M_0}{l} \dot{f}_c \quad (n)$$

Ricordando che è $p_0 = M_0/l^2$, si ottiene $s = 16$, in accordo con la (f1).

Ovvie modifiche che includano eventuali azioni concentrate conferiscono alle (13.28) validità generale. Non essendo di regola noto il meccanismo di collasso, queste relazioni non sono direttamente utilizzabili per il calcolo di s , ma forniscono comunque informazioni di grande utilità in vista della sua valutazione diretta. È importante osservare quanto segue.

1. La sommatoria al secondo membro della (13.28a) è certamente positiva. Per la (13.27) è infatti

$$D_c = \sum_k M_{0k} \dot{\varphi}_{kc} = \sum_k M_0 |\dot{\varphi}_{kc}| > 0 \quad (13.29)$$

La quantità indicata con D_c è nota come *potenza dissipata* nell'atto di moto relativo al meccanismo di collasso.

2. Dal momento che il moltiplicatore dei carichi cresce da zero, s è pure positivo. Dalle (13.28a) e (13.29) consegue che il verso dell'atto di moto relativo al meccanismo di collasso comporta valore positivo per la *potenza esterna* dei carichi base. Precisamente

$$\int p_0 \dot{v}_c dx > 0 \quad (13.30)$$

13.2.4 I TEOREMI FONDAMENTALI DEL CALCOLO A ROTTURA

13.2.4.1 Definizioni e dimostrazioni

Vengono ora introdotte due importanti famiglie di moltiplicatori del carico.

1. Si indichino con ψ i moltiplicatori per cui sia possibile trovare momenti flettenti $M_\psi(x)$ in equilibrio con i carichi base amplificati da ψ e ovunque rispettosi dei limiti di resistenza della sezione. Precisamente

$$-M_\psi''(x) = \psi p_0 + \text{condizioni al contorno di equilibrio} \quad (13.31a)$$

$$-M_0(x) \leq M_\psi(x) \leq M_0(x) \quad \forall x \quad (13.31b)$$

Nello scrivere la (13.31b), nota come *condizione di conformità*, si è assunto che il momento limite della sezione possa variare da punto a punto. Tali moltiplicatori sono detti *staticamente ammissibili*.

2. Si consideri un qualunque cinematismo ottenuto introducendo nella struttura un opportuno numero $j = 1, \dots, J$ di cerniere plastiche, che consenta un atto di moto rigido $(\dot{v}_\beta(x), \dot{\varphi}_{j\beta})$ di verso tale che la potenza dei carichi base sia positiva

$$\int p_0 \dot{v}_\beta dx > 0 \quad (13.32a)$$

A ognuno di tali cinematismi si associ un moltiplicatore β attraverso la condizione

$$\beta \int p_0 \dot{v}_\beta dx = \sum_j M_{0j} \dot{\varphi}_{j\beta} = D_\beta > 0 \quad (13.32b)$$

dove M_{0j} è il momento limite nella j -sima cerniera plastica, di segno concorde con il verso di rotazione della cerniera stessa. La sommatoria nella (13.32b) è allora costituita da addendi individualmente positivi e definisce la potenza dissipata nell'atto di moto.

I moltiplicatori β sono associati a cinematismi che hanno le stesse caratteristiche (13.30), (13.28) dell'effettivo meccanismo di collasso, ma non coincidono necessariamente con esso. Ogni insieme di cerniere plastiche che consenta un atto di moto in accordo con la (13.32a) permette di definire un valore di β . Tali moltiplicatori sono detti *cinematicamente sufficienti*.

Il moltiplicatore di collasso s è contemporaneamente staticamente ammissibile e cinematicamente sufficiente: i momenti $M_c(x)$ a collasso soddisfano infatti entrambe le condizioni (13.31), mentre l'effettivo meccanismo di collasso è uno dei possibili cinematismi (13.32).

Si possono ora dimostrare due importanti risultati, noti come *teoremi fondamentali del calcolo a rottura*.

- **Teorema statico** Il moltiplicatore di collasso è il massimo dei moltiplicatori staticamente ammissibili

$$s = \max\{\psi\} \quad (13.33)$$

- **Teorema cinematico** Il moltiplicatore di collasso è il minimo dei moltiplicatori cinematicamente sufficienti

$$s = \min\{\beta\} \quad (13.34)$$

Per dimostrare il primo teorema, si osservi che una soluzione staticamente ammissibile $(\psi p_0(x), M_\psi(x))$ è equilibrata nella configurazione indeformata e che l'atto di moto $(\dot{v}_c(x), \dot{\varphi}_{kc})$ consentito dall'effettivo meccanismo di collasso è un particolare atto di moto virtuale a partire da tale configurazione. Il principio delle velocità virtuali stabilisce allora

$$\psi \int p_0 \dot{v}_c dx = \sum_k M_\psi(x_k) \dot{\varphi}_{kc} \quad (13.35a)$$

Sottraendo questa relazione dalla (13.28a) si ottiene

$$(s - \psi) \int p_0 \dot{v}_c dx = \sum_k [M_{0k} - M_\psi(x_k)] \dot{\varphi}_{kc} \quad (13.35b)$$

Il secondo membro della (13.35b) è non-negativo per le (13.27) e (13.31b). Infatti, se è $\dot{\varphi}_{kc} > 0$ è anche $M_{0k} = M_0(x_k) \geq M_\psi(x_k)$; se è invece $\dot{\varphi}_{kc} < 0$ si ha $M_{0k} = -M_0(x_k) \leq M_\psi(x_k)$. L'integrale al primo membro è pure positivo per la (13.30). È quindi

$$s - \psi \geq 0 \quad (13.35c)$$

il che, tenendo conto che s appartiene all'insieme $\{\psi\}$, dimostra il teorema statico.

Si associno ora nell'identità delle velocità virtuali le quantità statiche relative alla situazione di collasso $(s p_0(x), M_c(x))$, equilibrate nella configurazione di riferimento, all'atto di moto $(\dot{v}_\beta(x), \dot{\varphi}_{j\beta})$ relativo al generico cinematismo (13.32). Si ottiene

$$s \int p_0 \dot{v}_\beta dx = \sum_j M_c(x_j) \dot{\varphi}_{j\beta} \quad (13.36a)$$

Sottraendo questa relazione dalla (13.32b) risulta

$$(\beta - s) \int p_0 \dot{v}_\beta dx = \sum_j [M_{0j} - M_c(x_j)] \dot{\varphi}_{j\beta} \quad (13.36b)$$

I momenti $M_c(x)$ a collasso rispettano ovunque la condizione di conformità (13.31b). È in particolare $-M_0(x_j) \leq M_c(x_j) \leq M_0(x_j)$ in tutte le J cerniere relative al meccanismo considerato. Ciò garantisce che il secondo membro della (13.36b) è non-negativo. L'integrale a primo membro è positivo per la (13.32a). Risulta quindi

$$\beta - s \geq 0 \quad (13.36c)$$

il che, ricordando che s appartiene all'insieme $\{\beta\}$, dimostra il teorema cinematico.

Il moltiplicatore di collasso è quindi l'elemento separatore tra gli insiemi dei moltiplicatori staticamente ammissibili e cinematicamente sufficienti. Il primo è costituito dai

valori che consentono di soddisfare sia l'equilibrio che la condizione di conformità, il secondo da quelli che rendono effettivamente possibile l'attivazione di un meccanismo, in quanto nell'atto di moto la potenza dei carichi esterni compensa quella dissipata nelle cerniere plastiche. Il moltiplicatore di collasso è unico; non sono peraltro necessariamente tali il meccanismo di collasso nè i momenti $M_c(x)$ a collasso incipiente.

Dalle dimostrazioni conseguono alcuni importanti corollari. Innanzi tutto, il moltiplicatore di collasso dipende solo dal valore del momento limite M_0 della sezione, che interviene, per quanto riguarda il teorema statico, nella condizione di conformità (13.31b) e, per il teorema cinematico, nella definizione della potenza dissipata D_β al secondo membro della (13.32b). La sola proprietà del materiale che determina il risultato è quindi il valore di σ_0 ; un diverso modulo elastico, così come eventuali deviazioni dalla linearità nel comportamento per $|\sigma| < \sigma_0$, non influenzano il valore di s . *La capacità portante della struttura è indipendente dalle proprietà elastiche del materiale.*

Deformazioni termiche, cedimenti vincolari, imprecisioni di montaggio o tensioni residue indotte dalla precedente storia di carico, pur se influenzano l'evoluzione della struttura, non alterano il valore di s . Tali effetti inducono tutti stati di coazione, in equilibrio sotto carichi nulli, che non intervengono nella definizione dei moltiplicatori staticamente ammissibili e quindi sul massimo di tali valori. Anche l'insieme dei moltiplicatori cinematicamente sufficienti non ne è influenzato, essendo i valori di β determinati unicamente da un bilancio tra la potenza esterna e quella dissipata nell'atto di moto del cinematismo. *La capacità portante della struttura è quindi indipendente da stati di coazione, spesso indotti da fenomeni non prevedibili.*

È facile estendere questi risultati a situazioni più generali, come il caso in cui il moltiplicatore μ amplifichi i carichi accidentali ma non quelli permanenti, o sezioni con momenti limite di segno opposto diversi in valore assoluto. Queste generalizzazioni sono lasciate come esercizio.

13.2.4.2 Calcolo del moltiplicatore di collasso

Il moltiplicatore di collasso è il solo che risulti sia staticamente ammissibile che cinematicamente sufficiente. Per sistemi di travi non troppo complessi, questa proprietà ne consente la valutazione con considerazioni pressoché immediate, come viene ora illustrato attraverso alcuni esempi.

ESEMPIO 13.6 Nel telaio di Figura 13.25a, i pilastri hanno momento limite M_0 mentre la trave presenta resistenza doppia. Come carico base si assuma

$$P_0 = \frac{M_0}{\ell} \quad (o)$$

Delimitazioni superiori al valore di s si calcolano considerando alcuni cinematismi ragionevoli, come i tre illustrati nelle Figura 13.25b, c, d (alla connessione tra pilastri e trave, le cerniere plastiche sono collocate all'estremità del pilastro, che presenta un momento limite inferiore). La (13.32b) si scrive nei tre casi

$$\beta_1 P_0 \ell \dot{\varphi} = 4M_0 \dot{\varphi} \quad (p1)$$

$$\beta_2 4P_0 \frac{\ell}{2} \dot{\varphi} = M_0 \dot{\varphi} + (2M_0)(2\dot{\varphi}) + M_0 \dot{\varphi} \quad (p2)$$

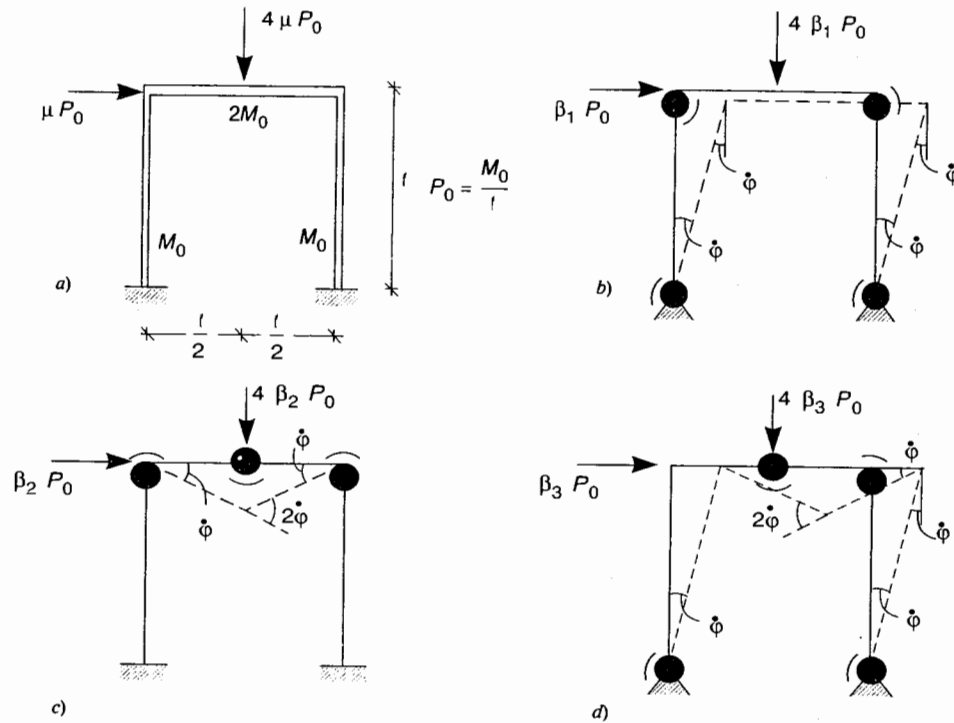


Figura 13.25

$$\beta_3 \left(P_0 \ell \dot{\varphi} + 4P_0 \frac{\ell}{2} \dot{\varphi} \right) = M_0 \dot{\varphi} + (2M_0)(2\dot{\varphi}) + M_0(2\dot{\varphi}) + M_0 \dot{\varphi} \quad (p3)$$

Ricordando il valore (a) attribuito al carico base, dalle (p) si ottiene con calcoli immediati

$$\beta_1 = 4.0 \quad \beta_2 = 3.0 \quad \beta_3 = \frac{8}{3} = 2.667 \quad (q)$$

Il teorema cinematico assicura che il moltiplicatore di collasso non può eccedere il più piccolo di tali valori, nel caso specifico β_3 .

Al fine di stabilire se tale moltiplicatore sia anche staticamente ammissibile, si consideri la struttura soggetta ai carichi base amplificati di β_3 . Le cerniere plastiche nel relativo cinematiso sono sostituite da cerniere strutturali, evidenziando i momenti limite che esse trasmettono come ulteriori carichi esterni, di verso concorde con quello di plasticizzazione (Figura 13.26a). Per equilibrio, si ottiene il diagramma dei momenti illustrato in Figura 13.26b, che prevede $|M(x)| \leq M_0$ nei pilastri e $|M(x)| \leq 2M_0$ nella trave ed è ovunque conforme. Il moltiplicatore β_3 è quindi anche staticamente ammissibile e si può scrivere

$$s = \beta_3 = 2.667 \quad \left(P_L = \frac{8M_0}{3\ell} \right) \quad (r)$$

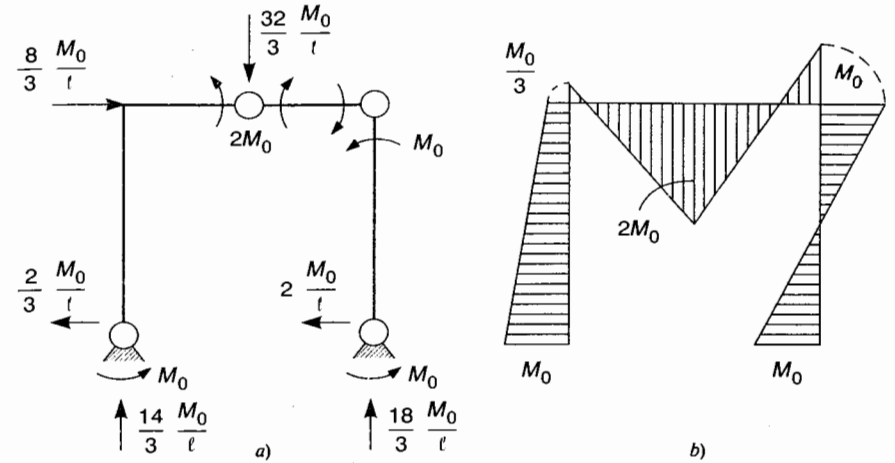


Figura 13.26

Si osservi che, quale che sia la cerniera plastica che si forma per ultima, la situazione di collasso incipiente è nel caso in esame isostatica. Una volta imposti nelle cerniere plastiche i valori limite dettati dal cinematiso, il diagramma dei momenti è infatti univocamente fissato dal solo equilibrio.

ESEMPIO 13.7 La trave di sezione costante in Figura 13.27a è soggetta al carico base uniforme $p_0 = M_0 \ell^2$. Se ne determina un moltiplicatore β sulla base del meccanismo in Figura 13.27b, che prevede una cerniera plastica all'incastro e una seconda in mezzaria. Tra la velocità di rotazione $\dot{\varphi}$ e quella trasversale \dot{t} della cerniera centrale sussiste la relazione

$$\dot{\varphi} = \frac{2}{\ell} \dot{t}$$

Con riferimento a questo cinematiso, la (13.32b) allora fornisce

$$\beta p_0 \frac{\ell}{2} \dot{t} = M_0 \dot{\varphi} + M_0(2\dot{\varphi}) = 6 \frac{M_0}{\ell} \dot{t}$$

da cui si ottiene

$$\beta = 12.0 \geq s \quad (s)$$

Si vuole ora stabilire se esistano momenti flettenti in equilibrio sotto il carico base amplificato da β e ovunque conformi. Si sostituiscono ancora le cerniere plastiche con cerniere strutturali, considerando i momenti limite come ulteriori carichi esterni (Figura 13.27c). Per equilibrio si ottiene

$$M_{\beta}(x) = M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \left(6 \frac{x}{\ell} - 1 \right) \quad (t1)$$

Il relativo diagramma è riportato in Figura 13.27d. La conformità è violata nel tratto annerito in figura. L'entità della violazione massima risulta

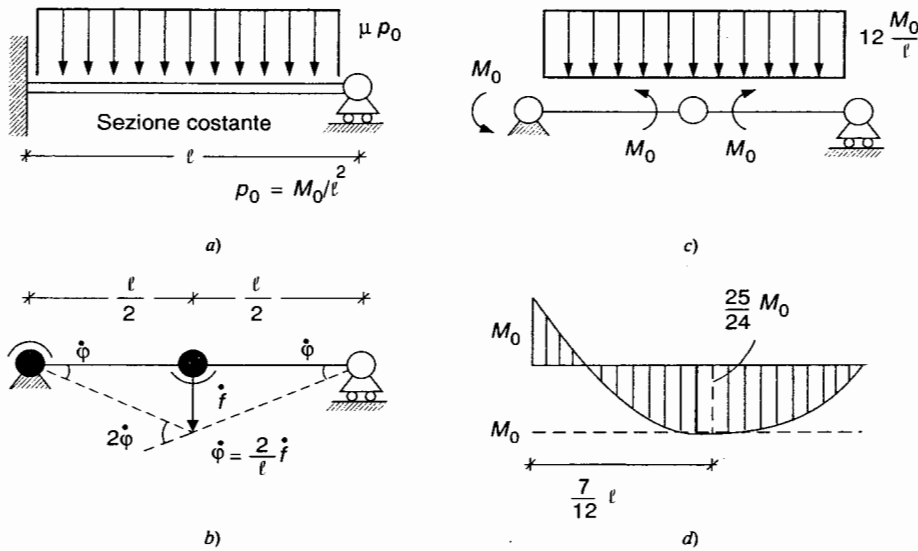


Figura 13.27

$$\max_{0 \leq x \leq l} |M_\beta(x)| = \frac{25}{24} M_0 \quad \text{per} \quad x = \frac{7l}{12} \quad (t2)$$

Nella struttura di Figura 13.27c i momenti sono fissati dall'equilibrio e la (t1) rappresenta la sola distribuzione equilibrata con βp_0 che assume i valori limite nelle cerniere plastiche previste dal cinematiso. Il moltiplicatore (s) non è quindi staticamente ammissibile e rappresenta solo una delimitazione superiore al valore di collasso.

Si osservi tuttavia che se i momenti (t1) vengono moltiplicati per il fattore riduttivo 24/25 la conformità viene a essere ovunque rispettata e, per la linearità delle equazioni di equilibrio, questo sussiste sotto i carichi ridotti nella stessa misura. Il moltiplicatore

$$\psi = \frac{24}{25} \beta = 11.520$$

è pertanto staticamente ammissibile e s risulta delimitato bilateralmente dai valori

$$11.520 \leq s \leq 12.0 \quad (u)$$

Per l'esempio in esame sarebbe facile ottenere l'esatto valore $s = 11.657$, corrispondente a un meccanismo simile a quello in Figura 13.27b, in cui però la cerniera interna si colloca nella sezione $x = .586l$. Ai fini pratici, una delimitazione sufficientemente ristretta, come la (u), è tuttavia del tutto adeguata.

ESEMPIO 13.8 Si consideri infine la trave in Figura 13.28, soggetta a due carichi concentrati di intensità, rispettivamente, kP_0 e P_0 ($k \geq 1$). Come valore base si assume $P_0 = M_0/l$. I moltiplicatori cinematicamente sufficienti relativi ai due cinematisi illustrati in Figura 13.29 risultano $\beta_1 = \frac{3}{k-1}$ e $\beta_2 = 1$. È quindi

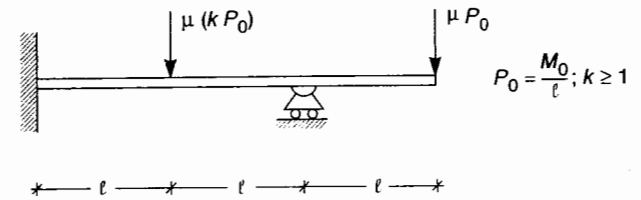


Figura 13.28

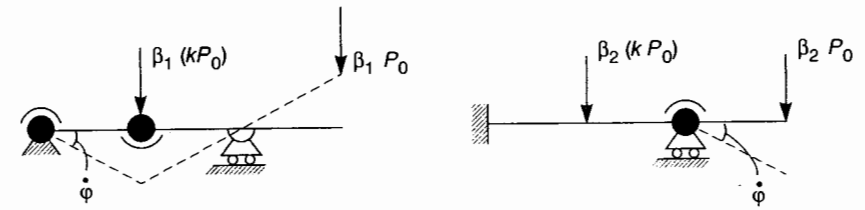


Figura 13.29

$$s \leq \beta_{\min} = \begin{cases} \beta_1 & \text{se } k \geq 4 \\ \beta_2 & \text{se } 1 \leq k \leq 4 \end{cases} \quad (v)$$

Si verifichi ora se β_{\min} sia anche staticamente ammissibile. Con riferimento al primo cinematiso ci si riconduce alla situazione in Figura 13.30a, dove i carichi sono stati amplificati da β_1 . Il relativo diagramma dei momenti, illustrato in Figura 13.30b, consegue dal solo equilibrio; la conformità può essere violata in corrispondenza del carrello, dove il momento vale

$$\bar{M} = -\frac{3}{k-1} M_0$$

Se è $k \geq 4$ si ha quindi $\bar{M} \leq -M_0$ e la conformità è rispettata.

L'analoga situazione relativa al secondo cinematiso è illustrata in Figura 13.31a. L'equilibrio determina univocamente il diagramma dei momenti solo sullo sbalzo, mentre nel tratto rimanente esso è funzione di un'incognita iperstatica, ad esempio il momento X all'incastro. Nella sezione sottostante il carico $\beta_2 k P_0$ il momento vale

$$\bar{M} = \frac{1}{2} [(k-1)M_0 - X] \quad (w)$$

Quale che sia il valore di X l'equilibrio è soddisfatto; se esiste un valore $|X| \leq M_0$ che implichi anche $|\bar{M}| \leq M_0$, il diagramma dei momenti è inoltre ovunque conforme (Figura 13.31b). Per $X = M_0$ dalla (w) si ottiene

$$\bar{M} = \frac{1}{2} (k-2)M_0$$

Per $1 \leq k \leq 4$ risulta $-M_0/2 \leq \bar{M} \leq M_0$ e il moltiplicatore β_2 è anche staticamente ammissibile. Si conclude quindi che risulta $s = \beta_{\min}$.

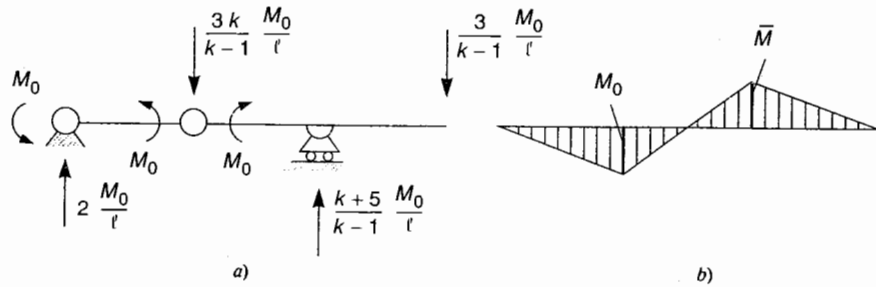


Figura 13.30

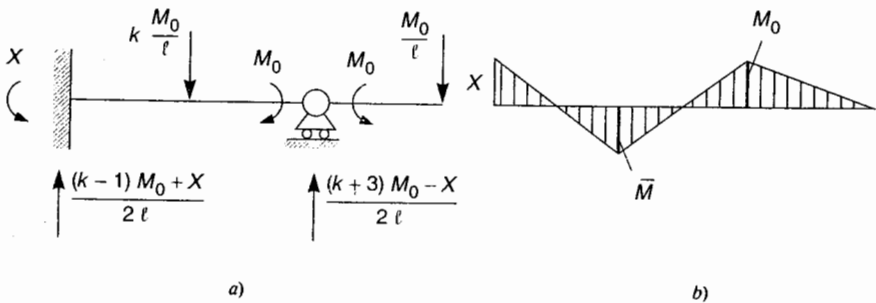


Figura 13.31

Gli esempi mostrano che il moltiplicatore di collasso può essere calcolato direttamente, evitando la completa analisi evolutiva della struttura. Operativamente, il calcolo di un moltiplicatore cinematicamente sufficiente tramite la (13.32b) è piuttosto agevole e l'intuizione spesso permette di limitare l'attenzione a pochi cinematismi ragionevoli. Il più piccolo valore così calcolato delimita superiormente il moltiplicatore di collasso, con cui si identifica se risulta anche staticamente ammissibile.

Ai fini di questa verifica, si osservi che, una volta sostituite le cerniere plastiche con cerniere strutturali ed evidenziati i momenti limite da esse trasmessi come ulteriori carichi esterni, la (13.32b) assume il significato di equazione delle velocità virtuali, che associa i carichi βp_0 e i momenti M_{0j} all'atto di moto relativo al cinematismo. Se questo presenta un solo grado di libertà, la (13.32b) assicura l'equilibrio del cinematismo. Esistono quindi momenti $M_{\beta}(x)$ in equilibrio con i carichi βp_0 che assumono i valori $M_{\beta}(x_j) = M_{0j}$ nelle cerniere plastiche. Va a questo proposito sottolineato che la definizione di moltiplicatore cinematicamente sufficiente non richiede che il cinematismo presenti un solo grado di libertà; peraltro, in sistemi di travi è ragionevole limitare l'attenzione a cinematismi di questo tipo, per cui a ogni moltiplicatore cinematicamente sufficiente è possibile associare una soluzione equilibrata. Tale soluzione rispetta la condizione di conformità nelle cerniere plastiche, ma non necessariamente altrove.

A volte il cinematismo rende la struttura staticamente determinata (esso è allora detto completa) ed è facile ricostruire i momenti in equilibrio con i carichi amplificati da β , verificando immediatamente se il moltiplicatore è anche staticamente ammissibile. In altri casi invece il cinematismo è parziale e coinvolge solamente una parte della struttu-

ra, altrove ancora iperstatica (vedi Figura 13.31b); l'equilibrio è comunque soddisfatto per qualsiasi valore delle iperstatiche residue e la soluzione è staticamente ammissibile se è possibile assegnare loro valori tali da soddisfare ovunque la conformità. Se il cinematismo considerato non coincide con l'effettivo meccanismo di collasso, la conformità risulta inevitabilmente violata in parte della struttura.

Questo procedimento è applicabile solo per strutture semplici. Il numero dei possibili cinematismi è altrimenti notevole ed è ovviamente improponibile che il calcolo si basi su di una semplice e acritica successione di tentativi. Sono state sviluppate strategie operative che consentono di migliorare via via l'accuratezza della soluzione. Si possono, ad esempio, considerare alcuni cinematismi semplici e combinarli in modo da ridurre la potenza dissipata a parità di potenza dei carichi, oppure procedere per successive delimitazioni bilaterali, associando a ogni soluzione cinematicamente sufficiente una corrispondente soluzione staticamente ammissibile e identificando su questa base un successivo cinematismo. Questi metodi, molto utili per calcoli manuali, sono tuttavia scarsamente sistematici e la loro efficienza dipende in misura determinante dall'esperienza dell'utilizzatore. Per la loro trattazione si rimanda a [1-4].

Metodi generali per la valutazione di s si basano su tecniche di Programmazione Matematica, che calcolano il massimo (o il minimo) di una funzione all'interno di un determinato dominio, definito da opportuni vincoli sulle variabili. Il moltiplicatore di collasso si ottiene allora massimizzando i valori staticamente ammissibili o minimizzando quelli cinematicamente sufficienti. A questi metodi si accennerà a conclusione del capitolo.

13.2.4.3 Attendibilità del moltiplicatore di collasso

Il moltiplicatore di collasso è indipendente dalle proprietà elastiche e quindi dalla deformabilità della struttura. Occorre tuttavia sincerarsi che questa non sia eccessiva, quantomeno non tale da compromettere le ipotesi alla base del calcolo a rottura. Per quanto notevole, la duttilità del materiale non è mai illimitata e le rotazioni nelle cerniere plastiche non devono comportare deformazioni che la eccedano; la rigidità inoltre si deteriora con l'attivazione delle successive cerniere plastiche e la struttura potrebbe divenire così cedevole da rendere inapplicabile l'ipotesi di piccoli spostamenti.

Nella maggioranza dei casi di interesse, la deformabilità non è tale da causare inconvenienti. Di regola gli spostamenti divengono notevoli solo in prossimità del collasso, per carichi che non dovrebbero essere mai avvicinati nella vita della struttura. Esistono però alcune situazioni in cui la deformabilità svolge un ruolo determinante, al punto che i calcoli che la ignorano conducono a risultati contraddittori.

Si consideri la trave a tre campate in Figura 13.32a. Quella centrale, di lunghezza l , è soggetta a un carico trasversale uniforme mentre le due laterali, di lunghezza ηl , sono scariche. Quale che sia il valore di η , il collasso si verifica quando si attiva il meccanismo in Figura 13.32b, cui è associata la soluzione staticamente ammissibile pure illustrata. Posto $p_0 = M_0/l^2$ il valore del carico base, il moltiplicatore di collasso risulta

$$s = 16 \left(p_L = 16 \frac{M_0}{l^2} \right) \quad (13.37a)$$

Al diminuire di η le due campate laterali contrastano in misura sempre maggiore le rotazioni delle sezioni sui due appoggi intermedi; per $\eta = 0$ la trave si identifica con quella doppiamente incastrata dell'Esempio 13.4, mentre per $\eta \rightarrow \infty$ ci si riconduce a una trave semplicemente appoggiata agli estremi. Dal momento che il valore (13.37a) di s non dipende da η , esso dovrebbe applicarsi anche a questa situazione limite. Operando direttamente su una trave appoggiata, il moltiplicatore di collasso risulta invece

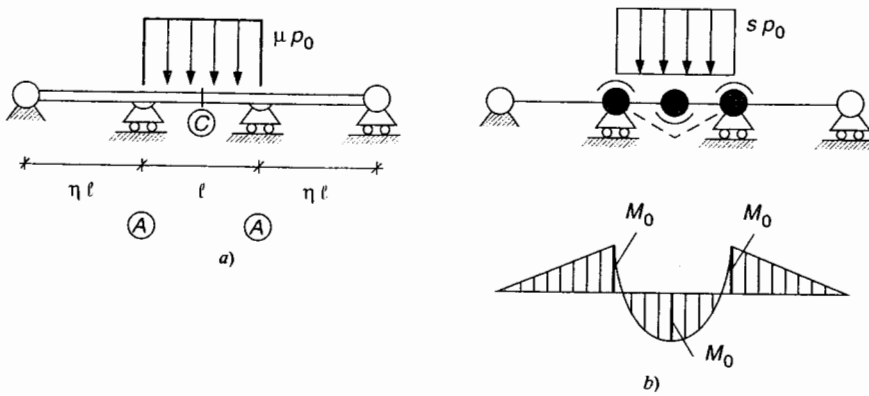


Figura 13.32

$$s_* = 8 \quad \left(p_{L_*} = 8 \frac{M_0}{\ell^2} \right) \quad (13.37b)$$

Le sezioni di appoggio infatti non contribuiscono alla potenza dissipata nell'atto di moto relativo al meccanismo di collasso. Il fatto che il valore (13.37b) non venga raggiunto come limite per $\eta \rightarrow \infty$ dalla trave di Figura 13.32a configura un paradosso (associato ai nomi di Stüssi e Kolbrunner), che viene però rimosso da una completa analisi evolutiva della struttura, che valuti in particolare l'entità degli spostamenti a collasso incipiente.

La soluzione elastica della trave in Figura 13.32a prevede per lo spostamento in mezzaria il valore

$$f = \frac{p\ell^4}{384EI} \frac{3 + 10\eta}{3 + 2\eta} = \frac{\mu}{384} \frac{3 + 10\eta}{3 + 2\eta} \frac{M_0\ell^2}{EI} \quad (x)$$

mentre in corrispondenza degli appoggi intermedi (sezioni A) e della sezione di mezzaria C i momenti flettenti risultano

$$M^A = -\frac{p\ell^2}{4} \frac{1}{3 + 2\eta} = -\frac{\mu}{4} \frac{1}{3 + 2\eta} M_0 \quad M^C = \frac{p\ell^2}{8} \frac{1 + 2\eta}{3 + 2\eta} = \frac{\mu}{8} \frac{1 + 2\eta}{3 + 2\eta} M_0 \quad (y1, 2)$$

La fase elastica si esaurisce quando il momento limite viene raggiunto in una di queste sezioni, quella che per il particolare valore di η risulta maggiormente sollecitata. Occorre distinguere i due casi seguenti.

1: $\eta \leq 0.5$. È allora $|M^A| \geq M^C$ e le prime cerniere plastiche si attivano sugli appoggi. La condizione $M^A = -M_0$ identifica per il moltiplicatore al limite elastico il valore

$$\mu_E^1 = 4(3 + 2\eta) \quad (13.38a)$$

Lo spostamento (x) vale adesso

$$f_E^1 = \frac{3 + 10\eta}{96} \frac{M_0\ell^2}{EI} \quad (13.38b)$$

Introducendo la (13.38a) nella (y2) si ottiene anche

$$M_E^{C1} = \frac{1 + 2\eta}{2} M_0 \leq M_0 \quad (z)$$

Nei confronti di ulteriori incrementi di carico, la trave risponde elasticamente secondo lo schema di Figura 13.33a. Si ottiene, rispettivamente per lo spostamento e il momento in mezzaria

$$\Delta f^1 = (\mu - \mu_E^1) \frac{5}{384} \frac{M_0\ell^2}{EI} \quad \Delta M^{C1} = (\mu - \mu_E^1) \frac{1}{8} M_0 \quad (aa1, 2)$$

Sommando questi incrementi ai valori al limite elastico risulta

$$f^1 = \frac{5\mu - 48}{384} \frac{M_0\ell^2}{EI} \quad M^{C1} = \left(\frac{\mu}{8} - 1 \right) M_0 \quad (ab1, 2)$$

La terza cerniera plastica si attiva per $M^{C1} = M_0$. Dalla (ab2) si ottiene così il valore (13.37a) del moltiplicatore di collasso che, introdotto nella (ab1) fornisce

$$f_L^1 = \frac{1}{12} \frac{M_0\ell^2}{EI} \quad \text{per} \quad \mu = s = 16 \quad (13.39)$$

Si osservi che questo valore è identico a quello della trave dell'Esempio 13.4, cui quella ora in esame si riconduce per $\eta = 0$.

2: $\eta \geq 0.5$. La prima cerniera plastica si forma in mezzaria, quando il valore (y2) di M^C eguaglia M_0 . Il moltiplicatore al limite elastico e la relativa freccia sono adesso

$$\mu_E^2 = 8 \frac{3 + 2\eta}{1 + 2\eta} \quad f_E^2 = \frac{1}{48} \frac{3 + 10\eta}{1 + 2\eta} \frac{M_0\ell^2}{EI} \quad (13.40a, b)$$

mentre sugli appoggi il momento vale

$$M_E^{A2} = -\frac{2}{1 + 2\eta} M_0 \geq -M_0 \quad (ac)$$

La risposta nei confronti di ulteriori incrementi di carico si calcola elasticamente sullo schema di Figura 13.33b. Risulta

$$\Delta f^2 = (\mu - \mu_E^2) \frac{3 + 8\eta}{384} \frac{M_0\ell^2}{EI} \quad \Delta M^{A2} = -(\mu - \mu_E^2) \frac{1}{8} M_0 \quad (ad1, 2)$$

Sommando la (ad1) al valore (13.40a) al limite elastico, si ottiene per lo spostamento in mezzaria

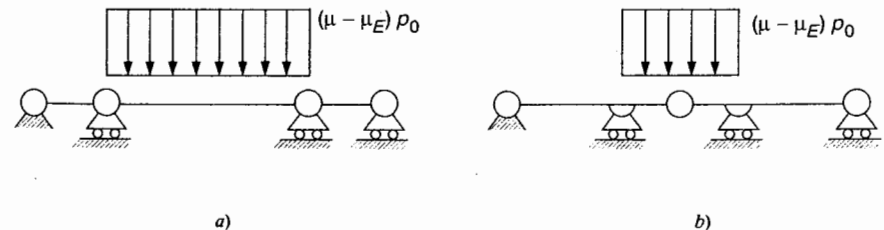


Figura 13.33

$$f^2 = \left(\mu \frac{3 + 8\eta}{384} - \frac{3 + 4\eta}{24} \right) \frac{M_0 \ell^2}{EI} \quad (13.41)$$

In modo analogo si calcola il momento flettente sugli appoggi

$$M^{A2} = - \left(\frac{\mu}{8} - 1 \right) M_0 \quad (ae)$$

Il meccanismo si attiva per $M^{A2} = -M_0$. Il valore di s è sempre dato dalla (13.37a), mentre lo spostamento (13.41) risulta, nella situazione di collasso incipiente

$$f_L^2 = \frac{\eta}{6} \frac{M_0 \ell^2}{EI} \quad \text{per} \quad \mu = s = 16 \quad (13.42)$$

I diagrammi carico-spostamento per la trave sono illustrati in Figura 13.34 per alcuni valori di η (quelli relativi a $\eta = .25$ e $\eta = .75$ sono distinti da un tratto più marcato). Il moltiplicatore di collasso (13.37a) può essere teoricamente raggiunto anche per η elevati, ma al prezzo di spostamenti che crescono proporzionalmente a tale valore e assumono inevitabilmente ampiezza inaccettabile. La pendenza della retta relativa alla fase elasto-plastica diminuisce al crescere di η e si annulla per $\eta \rightarrow \infty$, recuperando così il comportamento della trave semplicemente appoggiata.

Si introduca ora un limite \bar{f} per lo spostamento ammissibile. Ad esempio

$$\bar{f} = \frac{25}{48} \frac{M_0 \ell^2}{EI} \quad (13.43a)$$

Eguagliando la (13.41) a questa quantità e risolvendo per μ si ottiene

$$\bar{\mu} = 8 \frac{31 + 70\eta + 16\eta^2}{3 + 14\eta + 16\eta^2} \quad (13.43b)$$

È questo il moltiplicatore del carico per cui viene raggiunto il limite di deformabilità (13.43a).

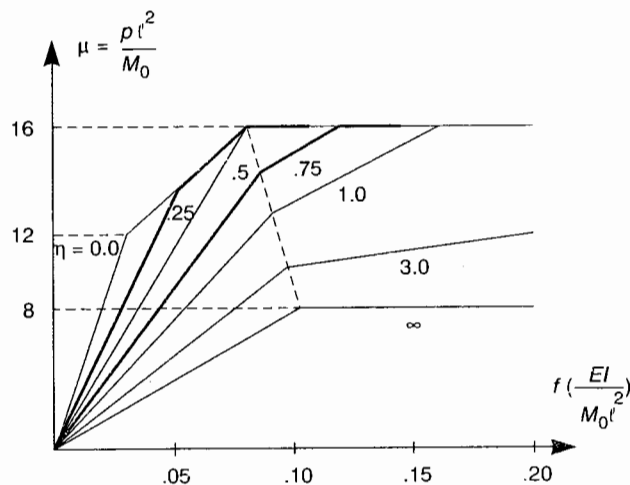


Figura 13.34

Esso risulta inferiore al moltiplicatore di collasso (13.37a) se $\eta \geq 3.125$. Il diagramma in Figura 13.35 riporta in funzione di η il moltiplicatore corrispondente a una situazione di crisi, dovuta a collasso plastico o a eccesso di deformabilità. Per $\eta \rightarrow \infty$ la curva avvicina il valore $s_* = 8$, vale a dire il moltiplicatore di collasso (13.37b) della trave semplicemente appoggiata.

Lo spostamento limite (13.43a) è tuttavia solo 5 volte il valore a collasso incipiente della trave appoggiata e non è elevato al punto da pregiudicare la validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti o da comportare deformazioni che eccedano le risorse di un materiale duttile. Anche così, il raggiungimento dello spostamento limite precede il collasso solo per η notevoli, che configurano dimensionamenti piuttosto particolari. Di fatto, anche in prossimità del collasso la maggior parte delle strutture di interesse presenta spostamenti sufficientemente contenuti perché il relativo moltiplicatore possa essere considerato attendibile.

Se però si ritiene la struttura potenzialmente deformabile in misura notevole, è necessario stimare l'entità degli spostamenti. Sono stati proposti a questo scopo metodi basati su calcoli elastici effettuati nella situazione di collasso incipiente, vale a dire sulla struttura soggetta ai carichi amplificati da s e in presenza di tutte le cerniere plastiche a eccezione di quella che si forma per ultima. Quale sia questa cerniera non è in genere noto a priori, ma un'ipotesi di tentativo può essere verificata e se necessario corretta. Per la trattazione di questi metodi si rimanda a [1-4].

13.2.5 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Sono a questo punto opportuni alcuni commenti sui teoremi fondamentali. Come si è già in precedenza sottolineato, indipendentemente dalla natura più o meno duttile del materiale, *condizione necessaria* perché i carichi non eccedano la capacità portante è che sia possibile trovare una soluzione equilibrata e rispettosa dei limiti di sforzo ammissibili. In altre parole, se il legame flessionale delle travi di cui la struttura è costituita incorpora la limitazione (13.31b) sul valore dei momenti flettenti e se, al termine di una particolare storia di carico, la situazione di crisi viene raggiunta per un carico pari a sp_0 , vale sempre la disequaglianza

$$s \leq \max\{\psi\} \quad (13.44a)$$

con ψ sempre definito dalle (13.31). Infatti, la soluzione del problema, che ancora esiste sotto i carichi sp_0 , soddisfa certamente queste condizioni, anche se non solo queste.

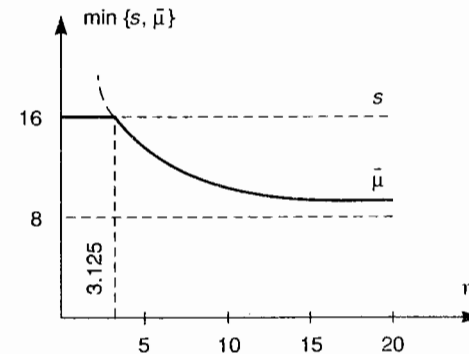


Figura 13.35

In generale l'esistenza di una soluzione staticamente ammissibile non è però sufficiente ad assicurare che la capacità portante della struttura non è stata ecceduta. Con riferimento alle analisi evolutive svolte negli Esempi 13.4 e 13.5, sarebbe infatti facile constatare che se il comportamento della sezione fosse fragile, se cioè raggiunto il valore $|M| = M_0$ la sezione si fessurasse, con conseguente rapida diminuzione del momento da essa sopportato, le due travi presenterebbero ben poche risorse rispetto al loro limite elastico. Il teorema statico peraltro assicura che per *comportamenti duttili* l'esistenza di una soluzione staticamente ammissibile è *condizione necessaria e sufficiente* perché la struttura possa reggere i carichi applicati. La duttilità, che si è supposto essere illimitata, consente deformazioni di entità arbitraria, che permettono comunque di ristabilire la congruenza. Si osserva a questo proposito che la dimostrazione del teorema assume che il collasso avvenga per formazione del meccanismo (13.28), il che è assicurato solo nelle ipotesi in cui si opera.

Come il teorema statico assicura che una struttura idealmente plastica certamente regge i carichi applicati se è possibile soddisfare l'equilibrio nel rispetto della conformità, così il teorema cinematico stabilisce che la sua capacità portante è certamente superata (o quantomeno raggiunta) se i carichi sono in grado di *attivare un meccanismo*, se cioè la loro potenza per il relativo atto di moto non è più che compensata da quella dissipata nelle cerniere plastiche. Questo risultato è di portata del tutto generale: dal momento che $\max\{\psi\} = \min\{\beta\}$, indipendentemente dalla duttilità del materiale dalla (13.44a) consegue infatti

$$s \geq \min\{\beta\} \quad (13.44b)$$

dove β è sempre definito dalle (13.32). Se il comportamento della sezione non è duttile, D_β diviene però una definizione formale, cui non è associato alcun particolare significato.

Nel caso di plasticità ideale le (13.44) valgono come eguaglianze. Se ne trae la notevole conclusione che, a parità di livello di sforzo ammissibile per il materiale, *il comportamento idealmente plastico è quello che conferisce alla struttura la più elevata capacità portante*. Si osservi anche che per altri comportamenti non è sempre possibile definire senza ambiguità un moltiplicatore di collasso: la situazione di crisi può infatti corrispondere a carichi più o meno elevati a seconda della storia seguita per raggiungerli.

Una struttura duttile regge i carichi applicati se è possibile soddisfare l'equilibrio senza eccedere la resistenza del materiale. È questa un'idea piuttosto intuitiva, su cui i costruttori si sono tacitamente basati fin dall'antichità: ignorando la deformabilità, quindi sia la congruenza che il legame costitutivo, essi si accontentavano di dimensionare la struttura (non necessariamente duttile) nei confronti di una ragionevole soluzione equilibrata. Alcuni lavori, segnatamente di Heymann, interpretano proprio da questo punto di vista la statica di costruzioni monumentali quali le cattedrali gotiche.

Lo stesso *problema di Galileo*, cui viene tradizionalmente associato l'inizio della vera e propria meccanica delle strutture, è in effetti un problema di calcolo a rottura. Tradotto in terminologia attuale, esso si propone la valutazione del carico di collasso di una mensola di sezione rettangolare sollecitata all'estremo libero, supponendo che la resistenza a trazione del materiale non possa eccedere il valore σ_0 . La Figura 13.36a mostra la soluzione di Galileo, che prevede trazioni pari a σ_0 in tutte le fibre della sezione di incastro. L'equilibrio alla rotazione attorno al punto A stabilisce

$$P_L \ell = \frac{1}{2} b h^2 \sigma_0 \quad (af)$$

Da cui si ottiene per il carico di collasso il valore

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{b h^2}{\ell} \sigma_0 \quad (ag)$$

La soluzione è corretta se (come all'epoca spesso tacitamente assunto) si suppone illimitata la resistenza a compressione del materiale. L'equilibrio alla traslazione secondo l'asse della mensola può allora essere ristabilito da una reazione orizzontale nella cerniera A. Se però si considera il materiale simmetrico, la situazione di collasso è quella in Figura 13.36b, che comporta per P_L un valore dimezzato. La soluzione di Galileo si configura adesso come cinematicamente sufficiente: a meno di $\dot{\varphi}$, il secondo membro della (af) è infatti la potenza dissipata nel cinematismo di Figura 13.36a.

Parallelamente ai primi sviluppi della teoria dell'elasticità, molti ingegneri del Settecento hanno rivolto la loro attenzione allo studio della *stabilità* di archi, volte o muri di sostegno, proponendo soluzioni che oggi verrebbero classificate come staticamente ammissibili. Anche successivamente all'affermazione dei metodi di calcolo elastico, ma ben prima che, verso la metà del ventesimo secolo, i teoremi fondamentali del calcolo a rottura venissero formalmente stabiliti, la validità del teorema statico è stata spesso sottintesa nella pratica operativa. Alcuni metodi approssimati per il calcolo di telai multipiano, ad esempio, consistono nel ridurre o eliminare l'iperstaticità della struttura introducendo cerniere laddove l'intuizione lascia ragionevolmente prevedere che i momenti flettenti si annullino. Non essendo a priori nota l'esatta posizione di tali sezioni, la soluzione comporta delle approssimazioni. Essa è però equilibrata e, se i momenti sono ovunque inferiori ai valori limite, staticamente ammissibile. In presenza di una sufficiente duttilità, essa consente quindi dimensionamenti certamente in grado di reggere i carichi applicati.

Un presupposto analogo consente di schematizzare come *reticolari* determinate strutture pur se i nodi, realizzati con giunti bullonati o saldati, di fatto trasmettono anche momenti flettenti. La loro entità è solitamente ridotta perché il momento limite delle aste è modesto, ma è comunque tale da influenzare la soluzione elastica. Se però i carichi possono essere equilibrati assimilando i nodi a cerniere, supponendo quindi presenti nelle aste solo azioni assiali, e se gli sforzi che ne conseguono sono ovunque inferiori al limite di snervamento del materiale, la soluzione è staticamente ammissibile e i carichi non eccedono la capacità portante.

Al teorema statico fanno riferimento molti metodi di calcolo per strutture in acciaio, su cui si basa il dimensionamento delle membrature dei telai, delle travature di grande luce e delle strutture di controvento [5], nonché quello di particolari costruttivi quali giunti o collegamenti. L'impiego di soluzioni staticamente ammissibili è accettato anche da normative che riguardano strutture di notevole impegno e pericolosità, come l'*ASME Boiler Code* o le raccomandazioni del *Der Norske Veritas Bureau* per strutture marine. Occorre naturalmente ricordare che la validità del teorema è condizionata dall'applicabilità dell'ipotesi di piccoli spostamenti, per cui strutture snelle richiedono alcune cautele.

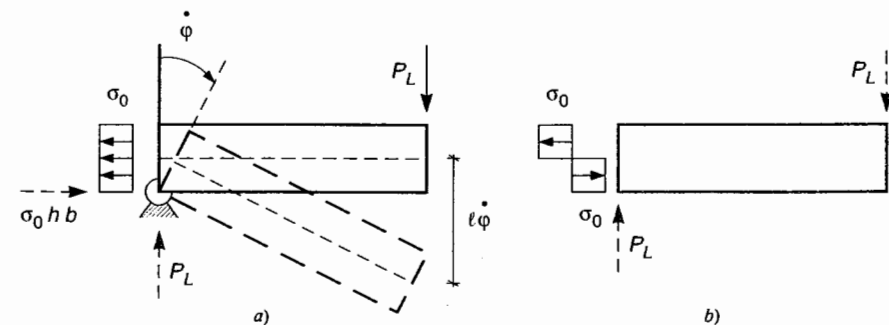


Figura 13.36

Il procedimento è anche utilizzato con riferimento a costruzioni in calcestruzzo armato, dove le armature e le dimensioni di sezioni di travi, nodi o plinti di fondazione sono spesso stabilite sulla base di soluzioni staticamente ammissibili [6]. Il calcestruzzo è in realtà un materiale fragile, ma l'armatura metallica può conferire all'insieme duttilità sufficiente per legittimare il ricorso al calcolo a rottura.