

5

La curva delle pressioni

5.1. GENERALITA'.

Dalla teoria del poligono funicolare è noto che, assegnato un sistema qualsiasi di forze nel piano, esistono ∞^3 poligoni funicolari connettenti il sistema di forze dato. Infatti, per tracciare un poligono funicolare occorre prefissare tre parametri, cioè, in generale, esso viene definito univocamente da tre condizioni. Consideriamo ad esempio la struttura illustrata in fig. 5.1.a, caricata dalle forze esterne F_1, F_2, F_3, F_4 .

Per l'equilibrio della struttura, le reazioni vincolari in A e in B devono costituire con la sollecitazione esterna un sistema nullo, quindi il poligono delle forze attive e reattive deve essere chiuso. Poichè il sistema è 3 volte iperstatico, esistono ∞^3 soluzioni per le reazioni vincolari nella statica dei corpi rigidi. Noi supponiamo di conoscere le reazioni vincolari effettive, ottenute considerando il corpo deformabile.

Degli ∞^3 poligoni funicolari che connettono le forze esterne F_i , costruiamo quello che rispetta le seguenti tre condizioni:

- il primo lato del poligono sia parallelo alla retta di azione di R_A ;
- l'ultimo lato del poligono sia parallelo a R_B ;

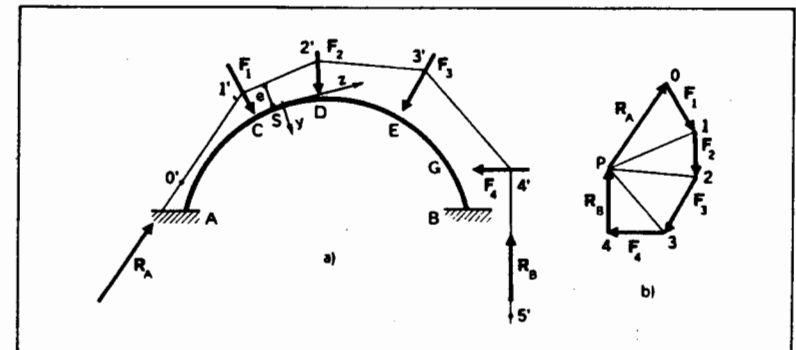


Figura 5.1

c) il primo lato del poligono coincida con la retta di azione di R_A .

Le condizioni a) e b) individuano il polo P (fig. 5.1.b) del poligono delle forze (1), mentre la terza condizione fissa il primo lato del poligono tra le infinite rette parallele a $O'1'$. Il poligono funicolare che connette le forze esterne e soddisfa alle condizioni a), b), c) è unico e prende il nome di *poligono delle pressioni*, *curva delle pressioni* o *poligono delle successive risultanti* (brevemente c.d.p.). Ogni lato del poligono funicolare si chiama anche *linea delle pressioni*.

Il poligono delle pressioni si chiama anche *curva delle pressioni* perchè, come accade in generale, per la presenza di carichi distribuiti, esso è una curva; inoltre, è denominato *poligono delle successive risultanti* in quanto, come si può notare, esso è il poligono delle direzioni delle successive risultanti delle forze applicate considerate partendo da un estremo e percorrendo con continuità l'asse della struttura.

Il suo generico lato, cioè, è la retta di applicazione della risultante di tutte le forze che precedono questo lato. Se si considera, ad esempio, una sezione S del tratto CD (fig. 5.1.a), le forze a sinistra sono R_A ed F_1 , la cui risultante R , rappresentata dal vettore $(1-P)$ (fig. 5.1.b), è applicata al lato del poligono funicolare compreso tra F_1 ed F_2 . Le componenti di tale risultante R secondo la tangente e la normale all'asse della trave, poi, forniscono rispettivamente lo sforzo normale e il taglio in S , mentre il prodotto Re della risultante per l'eccentricità e dà il momento flettente in S . La curva delle pressioni, quindi, fornisce una visione immediata delle condizioni statiche della struttura; essa, cioè, costituisce una rappresentazione grafica sintetica dell'azione interna.

5.2. CONSIDERAZIONI SU UN ESEMPIO TIPICO.

Vogliamo determinare la curva delle pressioni per l'arco a tre cerniere mostrato in fig. 5.2 e soggetto ad una forza concentrata nel punto T del tratto BC .

(1) Con riferimento ad un sistema piano di forze $\{F_1, \dots, F_n\}$, si definisce *poligono delle forze* la poligonale $O1 \dots n$ che, a partire da un punto O del piano, ha come primo lato $O1$ il vettore equipollente alla forza F_1 , uscente dal vertice O , come secondo lato 12 il vettore equipollente alla forza F_2 uscente dal vertice 1 e così di seguito, e come ultimo lato $(n-1)n$ il vettore equipollente alla forza F_n uscente dal vertice $(n-1)$. Scelto poi un punto P del piano (polo) non appartenente alle rette $O1, \dots, On$, le semirette $PO, P1, \dots, Pn$ prendono, rispettivamente, il nome di primo, secondo, ..., ennesimo *raggio proiettante*.

Si definisce *poligono funicolare* connettente il sistema di forze $\{F_1, \dots, F_n\}$, la poligonale $O'1' \dots n'$ avente i lati paralleli ai rispettivi raggi proiettanti e i vertici $O', 1', \dots, n'$ sulle rette di applicazione delle forze.

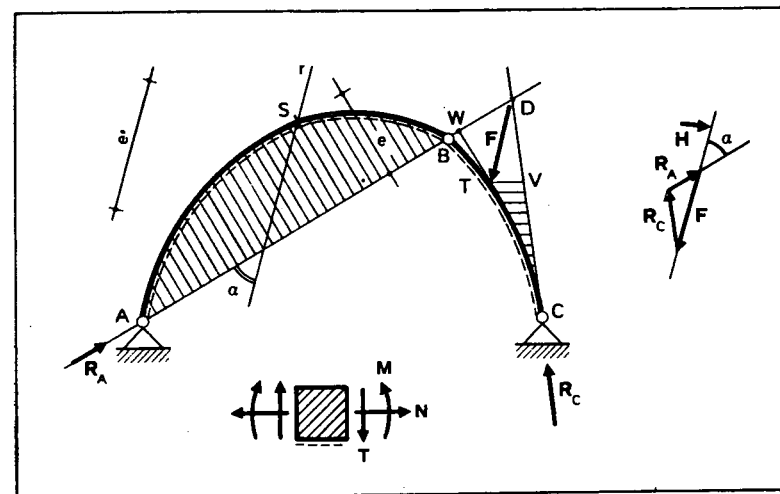


Figura 5.2

In questo caso è immediato verificare che la bilatera ADC rappresenta la curva delle pressioni. Con riferimento alla generica sezione S del tronco AB , si osserva che la risultante delle forze agenti a sinistra della sezione coincide con R_A . Pertanto lo sforzo normale e il taglio in S sono forniti dalle componenti di R_A secondo la tangente e la normale in S all'asse della struttura; il momento flettente (in S) è dato da $R_A e$, cioè dalla risultante delle forze a sinistra moltiplicata per la distanza della sua retta di azione (linea delle pressioni per il tratto ABT) da S .

Per quanto riguarda il segno delle componenti dell'azione interna in S , le caratteristiche positive da considerare sono, naturalmente, quelle indicate sulla sezione sinistra del concio. Nota la curva delle pressioni per una struttura, quindi, è possibile ricavare il valore di M , N e T per ogni sezione di essa (2). Se si suppone inoltre R_A unitaria, la generica ordinata, normale alla curva delle pressioni, compresa tra quest'ultima e l'asse dell'arco, rappresenta, in opportuna scala, il momento flettente nella sezione.

Si comprende così che, man mano che la curva delle pressioni si avvicina all'asse geometrico della struttura, la caratteristica flettente diminuisce; per tratti rettilinei, poi, e con forza applicata in C , la curva delle pressioni coincide con l'asse geometrico della struttura (fig. 5.3). In tal caso M e T

(2) Per un arco con curvatura variabile con continuità, riferendoci ai valori assoluti, nella sezione di momento massimo risulta massimo anche lo sforzo normale; lo sforzo di taglio invece è nullo. Ciò è vero solo nelle ipotesi dell'arco AB di fig. 5.2.

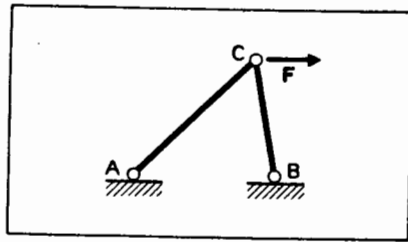


Figura 5.3

sono nulli, mentre la sola componente dell'azione interna presente risulta essere lo sforzo normale.

5.3. LA SCALA NELLA LETTURA DEI DIAGRAMMI.

Con riferimento alle notazioni di fig. 5.2, il momento M_T nella sezione T di applicazione della forza concentrata, a seconda che si considerino le forze a destra o a sinistra della sezione (per semplicità prescindendo dal segno), assume rispettivamente l'aspetto

$$M_T = R_C \overline{TV}$$

$$M_T = R_A \overline{TW}$$

Dalla prima di tali relazioni risulta che il segmento \overline{TV} , a meno di R_C , rappresenta il momento in T . Analogamente, dalla seconda relazione risulta che il segmento \overline{TW} rappresenta il momento in T nella scala di R_A che, in generale, è diversa da R_C .

In conclusione, tracciando il diagramma del momento con ordinate normali alla curva delle pressioni vengono ad essere adottate due scale diverse: R_A da A al punto di applicazione di F , R_B da T a C . I segmenti \overline{TW} e \overline{TV} , quindi, sono in generale diversi. Per tracciare il diagramma dei momenti in un'unica scala, riferiamoci ancora alla struttura di fig. 5.2.

Relativamente alla generica sezione S , mandiamo la parallela r alla direzione della forza fino ad intersecare la curva delle pressioni relativa al tratto AB . Sia e' la lunghezza del segmento della suddetta retta compreso tra l'asse del tratto AB e la relativa curva delle pressioni. Il prodotto di tale distanza per la componente H di R_A normale ad r fornisce il momento in S ; cioè $M_S = He'$. Indicato inoltre con e il braccio di R_A rispetto ad S , risulta

$$M_S = R_A e = He'$$

dato che $M_S = R_A e = R_A e' \sin \alpha = He'$

Analogamente, a destra di F il momento nella generica sezione è fornito dal prodotto di e' (ordinata generica letta nella direzione di F) per H (componente di R_C normale alla direzione di F). In definitiva, si può concludere dicendo che i segmenti paralleli ad F , intercettati tra l'asse dell'arco e la curva delle pressioni (rette di azione delle reazioni vincolari), moltiplicati per la componente H delle reazioni secondo la normale ad F , cioè nella scala di H , rappresentano i momenti nelle varie sezioni. Si ha cioè

$$M_S = He' S_L S_F.$$

Esercizio 5.1.

Disegnare la c.d.p. per la struttura di fig. 5.1.1.a con un carico distribuito applicato sul tratto rettilineo.

Se in luogo del carico distribuito agisce il carico concentrato $Q = ql$, la curva delle pressioni risulterebbe essere la spezzata ADC . Ma poiché sul tratto BC insiste il carico distribuito q , occorre tenerne conto modificando la parte di bilatera BDC relativa al tronco su cui agisce appunto q .

Si suddivida il carico distribuito in quattro parti, ad esempio, e, sostituita ciascuna di queste parti con la rispettiva risultante, si costruisca la poligonale $A1'2'3'4'C$ mostrata in fig. 5.1.1.a. La risultante di R_A e q_1 è $R_1 = (1 - p)$

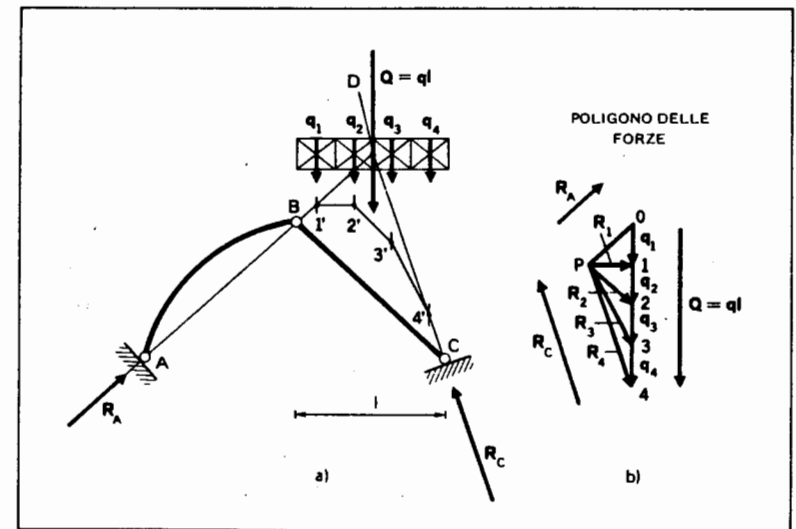


Figura 5.1.1

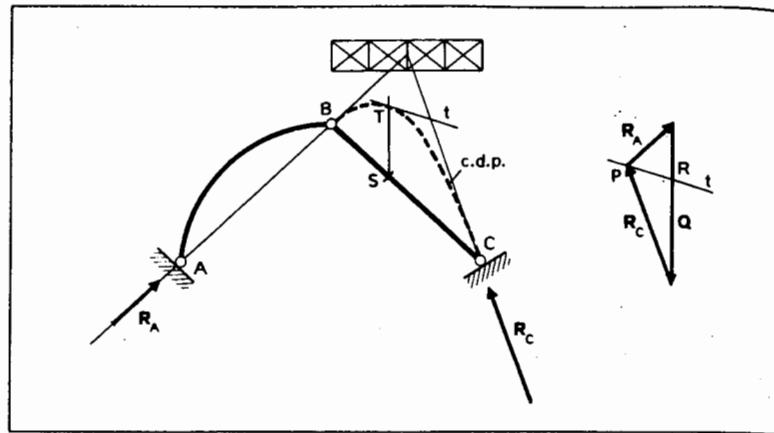


Figura 5.1.2

(fig. 5.1.1.b) ed è applicata nel loro punto di intersezione $1'$. La risultante di R_1 e q_2 , rappresentata nel poligono delle forze dal vettore $2-P$, è applicata in $2'$; il vettore $3-P$ rappresenta la risultante R_3 di R_2 e q_3 applicata in $3'$. La risultante di R_A e di tutto il carico distribuito, infine, cioè la risultante di R_3 e q_4 è la reazione $-R_C = R_4$, applicata in $4'$.

Il poligono funicolare di vertici $B1'2'3'4'C$, per come è stato costruito, è il poligono delle successive risultanti dei carichi R_A , q_1 , q_2 , q_3 , q_4 . Suddividendo il carico distribuito in parti sempre più piccole, i lati del poligono funicolare aumentano e, al limite, per una suddivisione infinitamente grande del carico distribuito, il poligono funicolare tende ad una curva detta appunto curva delle pressioni (fig. 5.1.2).

La c.d.p. nel caso in esame è una parabola, tangente in B e in C rispettivamente alle rette di azione di R_A e R_C . Essa può essere definita come involuppo di tangenti rappresentate dai lati del poligono funicolare che connettono le forze infinitesime in cui può pensarsi suddiviso il carico distribuito.

5.4. UTILIZZAZIONE DELLA CURVA DELLE PRESSIONI.

La curva delle pressioni dipende, ovviamente, dal carico e dalla posizione dei vincoli sulla struttura, ma non dalla geometria dei singoli tratti. La forma geometrica dell'asse della struttura influisce solo nella valutazione delle caratteristiche della sollecitazione nella sezione. Ad esempio, volendo

determinare i valori delle componenti dell'azione interna in S per la struttura di fig. 5.1.2 dell'esercizio 5.1, di cui è disegnata la curva delle pressioni, occorre determinare anzitutto la risultante delle forze agenti a sinistra (o a destra) della sezione S . (In sostanza, per poter utilizzare la c.d.p. basta invertire il ragionamento fatto per costruirla).

Ciò può eseguirsi inoltrando da S la retta parallela alla direzione del carico fino ad incontrare la curva delle pressioni in T : la tangente t in T alla c.d.p. rappresenta la direzione della risultante delle forze applicate in S . Il valore di tale risultante si ottiene mandando dal polo P del poligono delle forze la parallela a t fino ad intersecare il poligono nel punto R : il vettore $R-P$ rappresenta la risultante delle forze agenti a sinistra di S ; il vettore $P-R$, quella delle forze a destra di S .

Determinata così la risultante R_S delle forze agenti in S , lo sforzo normale è dato dalla componente di R_S secondo la tangente in S all'asse della struttura, il taglio dalla componente normale e il momento dal prodotto di R_S per la distanza di t da S .

Esercizio 5.2.

Determinare la c.d.p. per la struttura riportata in fig. 5.2.1.

Per l'equilibrio del tratto BC la linea delle pressioni coincide con la retta BC . Infatti, per ogni sezione del tratto BC , la risultante delle forze che precedono o seguono la sezione è applicata alla retta BC .

Sostituendo il carico distribuito con quello concentrato $Q = qR$, la c.d.p. per il tratto AB risulterebbe essere la bilatera BHA : ossia BH per il tratto KB ed AH per il tratto AK . Per tener conto dell'effettiva distribuzione del

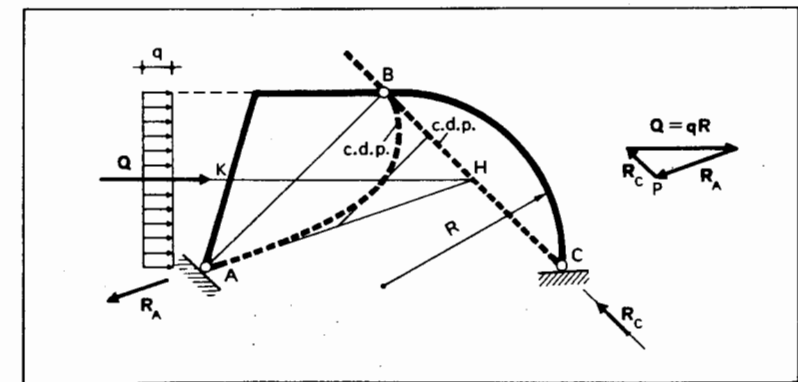


Figura 5.2.1

carico sul tratto AB , invece, occorre inserire la parabola tra le tangenti note in A e in B per cui passa la parabola.

Esercizio 5.3.

Determinare la c.d.p. per il sistema di fig. 5.3.1.

La struttura in esame, isostatica sia internamente che esternamente, è caricata da una coppia concentrata M nel punto medio del tratto GD . Determinate le linee di azione delle reazioni vincolari esterne, considerando l'equilibrio di tutta la struttura, è immediato calcolare anche quelle delle interazioni.

Infatti, per l'equilibrio dei tratti DE e CBE l'interazione della cerniera C agisce sulla retta CP ; per l'equilibrio del tratto DAC , la risultante della reazione vincolare in A e dell'interazione in C è parallela alla congiungente DE . Il poligono delle pressioni, quindi, inteso come insieme di linee delle pressioni, relative ai vari tratti, su cui è applicata la risultante delle forze che competono ai tratti stessi per la valutazione delle componenti dell'azione interna, può essere sintetizzato come indica la tabellina riportata in fig. 5.3.1.

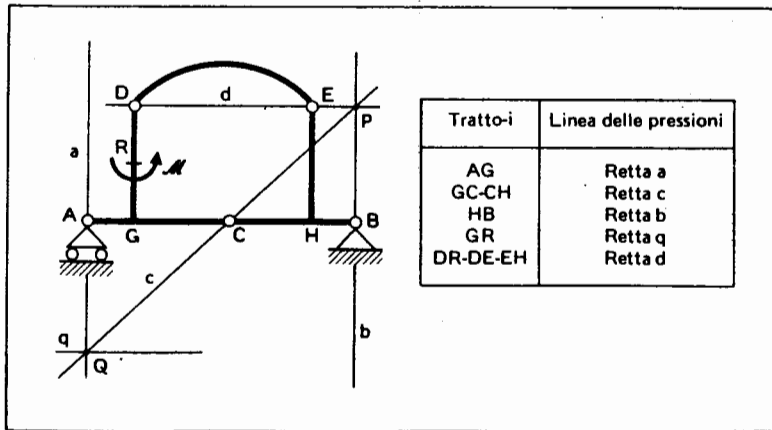


Figura 5.3.1

Esercizio 5.4.

Determinare la curva delle pressioni per la trave appoggiata soggetta: a) ad una forza concentrata in mezzeria (fig. 5.4.1.a); b) ad un carico distribuito q sull'intera luce (fig. 5.4.1.b).

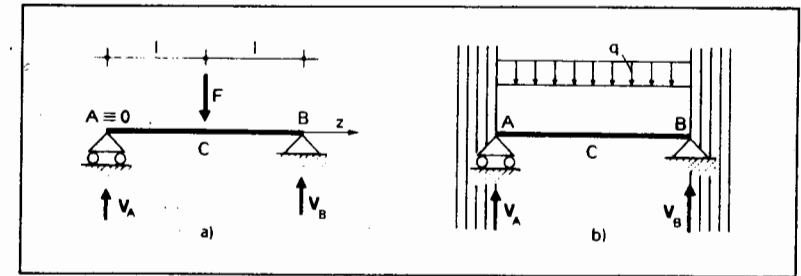


Figura 5.4.1

Considerata come luogo delle successive risultanti, la curva delle pressioni, nel caso di forza concentrata in mezzeria, degenera in due rette: quella che contiene V_A e quella che contiene V_B (fig. 5.4.1.a).

Nel caso di trave appoggiata con carico distribuito la c.d.p., invece, comprende tutte le rette del piano parallele a V_A e V_B esterne al segmento AB (zona tratteggiata) (fig. 5.4.1.b). Infatti, percorrendo la trave da A verso B , ad esempio, consideriamo le sezioni per le quali risulta $0 < z < l$, $l < z < 2l$; per ognuna di queste sezioni le forze agenti a destra o a sinistra sono due forze parallele e discordi di cui la reazione di un vincolo è la maggiore. La loro risultante, pertanto, dovendo essere dalla parte della forza maggiore, si troverà sempre all'esterno del segmento AB . Per le sezioni A e B , poi, la risultante delle forze coincide con le reazioni vincolari in A e in B rispettivamente, mentre in corrispondenza della sezione di mezzeria C la risultante è una coppia la cui retta di azione è la retta impropria.

E' facile intuire che la c.d.p. quando degenera perde tutto il suo significato, cioè non può essere utilizzata per determinare le componenti dell'azione interna e non dà una visione immediata delle condizioni statiche della struttura.

Esercizio 5.5.

Determinare la c.d.p. per la struttura indicata in fig. 5.5.1.

I tratti AC e CB sono soggetti a carichi distribuiti agenti come è mostrato in fig. 5.5.1; la struttura è un arco circolare a tre cerniere le cui reazioni vincolari sono quelle indicate in figura.

Infatti la risultante del carico esterno vale $Q\sqrt{2}$ ed è applicata alla retta CB : per l'equilibrio dei vincoli esterni, dunque, la retta di applicazione della reazione in A è la congiungente AB . Essendo la reazione in A orizzontale, risulta orizzontale, per l'equilibrio del tronco AC , anche l'interazione della cerniera C . Per l'equilibrio del tronco CB , infine, l'interazione della cerniera

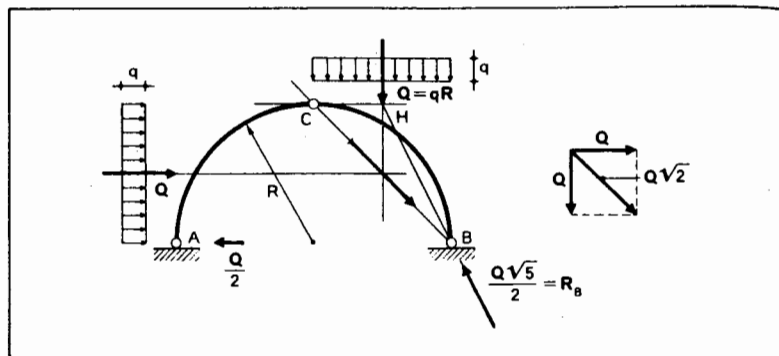


Figura 5.5.1

interna, il carico esterno e la reazione in B concorrono nello stesso punto H. Con semplici considerazioni, poi, si determinano i moduli ed i versi delle reazioni vincolari interne ed esterne. Note le reazioni vincolari è facile rilevare che la c.d.p., per il tratto CB, è un arco di parabola (3) avente tangente in C orizzontale e in B coincidente con R_B , mentre per il tratto AC degenera in un insieme di rette orizzontali. In sostanza il tratto AC si comporta come una trave appoggiata agli estremi e soggetta ad un carico uniformemente ripartito su tutta la sua luce.

Esercizio 5.6.

Determinare la c.d.p. per un arco parabolico a tre cerniere soggetto ad un carico distribuito q (fig. 5.6.1).

Poichè il carico è verticale e distribuito in modo uniforme, la funicolare del carico è una parabola. Poichè questa deve passare per i punti A, B e C in cui sono ubicate le cerniere (essendo in tali punti nullo il momento), consegue che la curva delle pressioni coincide con l'asse dell'arco. In altre parole, se

$$y = ax^2 + bx + c$$

è l'equazione della parabola che contiene l'arco ABC e

$$y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

è la funicolare del carico costante, dovendo y_1 passare per i punti A, B e C in cui si annulla il momento, si ha

(3) La c.d.p. è parabolica perchè funicolare di un carico costante.

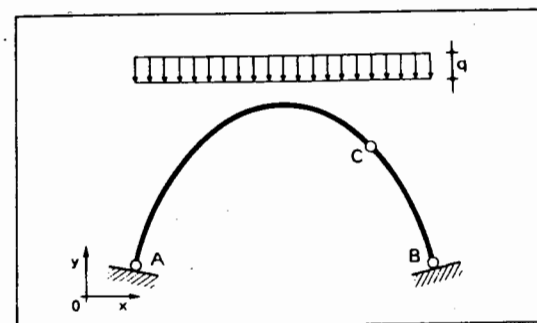


Figura 5.6.1

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1.$$

Ciò fa sì che nella generica sezione, essendo la risultante delle forze (agenti a destra o a sinistra della sezione) applicata alla tangente all'asse in quella sezione, sono nulli il taglio e il momento flettente. Tutta la struttura, quindi, risulta soggetta solo a sforzo normale.

Esercizio 5.7.

Determinare la c.d.p. per un arco semicircolare di raggio R soggetto ad un carico uniforme radiale (fig. 5.7.1).

Date le condizioni di simmetria del carico (cap. 9), la risultante Q di quest'ultimo, pensato agente sulla struttura solidificata in C, è verticale e passa per il centro O dell'arco. Scelto un riferimento polare con origine

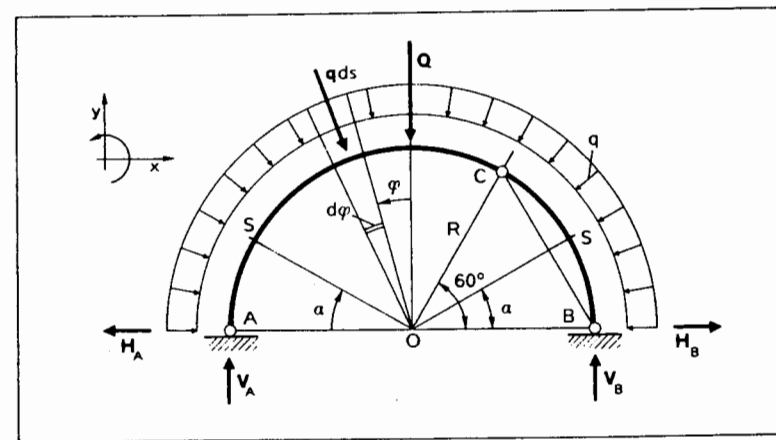


Figura 5.7.1

nel centro O dell'arco e indicando con φ l'argomento a partire dalla verticale per O , si ha

$$(5.7.1) \quad Q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q \cos \varphi R \, d\varphi = 2qR.$$

Il risultato fornito dalla (5.7.1) è generale, nel senso che, indipendentemente dalla forma dell'arco e per carico costante e ortogonale all'asse della struttura, la risultante è data sempre dal prodotto del modulo del carico per la proiezione ortogonale del tratto caricato sulla normale alla risultante.

Con riferimento alle notazioni di fig. 5.7.1, le tre equazioni della statica applicate a tutta la struttura danno:

$$(5.7.2) \quad \begin{aligned} y) \quad & V_A + V_B - Q = 0 \\ x) \quad & -H_A + H_B = 0 \\ A) \quad & V_B 2R - QR = 0. \end{aligned}$$

Poichè le tre equazioni (5.7.2) contengono quattro incognite, occorre scrivere un'equazione ausiliaria esprimente, ad esempio, l'equilibrio alla rotazione di BC intorno a C .

Essendo l'angolo $B\hat{O}C$ di 60° , il segmento CB ha la lunghezza del raggio R , mentre la risultante del carico agente sull'arco CB vale qR . La suddetta equazione ausiliaria, pertanto, assume l'aspetto

$$(5.7.3) \quad V_B \frac{R}{2} + H_B \frac{R}{2} \sqrt{3} - (qR) \frac{R}{2} = 0.$$

Dalle (5.7.2) e (5.7.3) consegue

$$(5.7.4) \quad \begin{aligned} V_A = V_B = \frac{Q}{2} = qR = V' \\ H_A = H_B = 0. \end{aligned}$$

Nella generica sezione S (del tratto AC o CB) il momento flettente, computando gli angoli a partire dalla semiretta orizzontale uscente dal centro O , assume l'aspetto

$$(5.7.5) \quad \begin{aligned} M_S &= VR(1 - \cos \alpha) - 2qR^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= qR^2 \left[1 - \cos \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right]. \end{aligned}$$

Dato che nella (5.7.5) è nullo il termine racchiuso tra le parentesi quadre, risulta $M_S = 0$.

Inoltre, sia con il metodo diretto, sia con il metodo analitico, se si tiene conto che nella sezione generica il taglio è fornito dalla relazione differenziale

$$T_S = \frac{dM}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\alpha},$$

si dimostra che il taglio è nullo in ogni sezione. La curva delle pressioni, pertanto, coincide con l'asse dell'arco semicircolare.

Lo sforzo normale N nella sezione corrente vale

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= -V \cos \alpha - 2qR \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= -qR \left(\cos \alpha + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = -qR. \end{aligned}$$

Le strutture con le condizioni di carico per cui la c.d.p. coincide con l'asse geometrico della struttura si chiamano *strutture funicolari di carico*.

Esercizi proposti.

5.8.- 5.11. Tracciare la curva delle pressioni per le strutture riportate nelle figg. 5.8.1, 5.9.1, 5.10.1, 5.11.1 e disegnare il diagramma del momento, riferendolo alle linee di pressione per i tratti curvi.

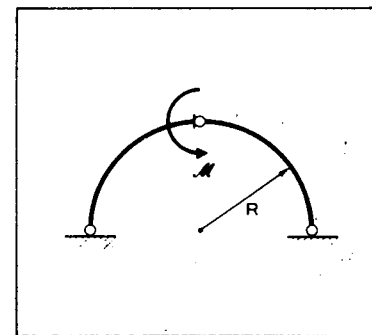


Figura 5.8.1

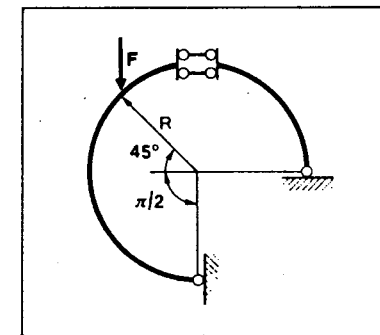


Figura 5.9.1