Dr. Jorge Vitória
Università degli Studi di Cagliari, 2020/2021
Corso di Laurea in Matematica

Esercizio modello per la parte 2 del corso di ALGEBRA 2

Questo è un esercizio simile a quelli che troverete negli esami scritti. Vi sugerisco di provare a risolverlo senza guardare le soluzioni (che troverete nelle prossime pagine). Vi ricordate che tutte le risposte devono essere dettagliatamente giustificate!

Si consideri il campo $\mathbb{F} := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, i)$.

1. Si determini una base per $\mathbb{F}$ su $\mathbb{Q}$ e si indichi $[\mathbb{F} \colon \mathbb{Q}]$.
2. Si dimostri che $\mathbb{F}$ è isomorfo a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})[x]/\langle x^2+1\rangle$.
3. Si dimostri che $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(i\sqrt[3]{5})$.
4. Si determini il polinomio minimo di $i\sqrt[3]{5}$ su $\mathbb{Q}$.
5. Sia β un elemento in $(\mathbb{R} \cap \mathbb{F}) \setminus \mathbb{Q}$. Si determini il grado del polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}$.

Ecco qui le soluzioni.

1. Cominciamo calcolando una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ su $\mathbb{Q}$. Chiaramente, $\sqrt[3]{5}$ è radice del polinomio $f := x^3 - 5$. Siccome f non ha radici su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ è un campo e ha grado 3, f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ se e solo se non ha radici in $\mathbb{Q}$. Questo è il caso perchè $x^3 - 5$ ha due radici non reali in $\mathbb{C}$ e l'unica radice reale è $\sqrt[3]{5}$, che non è razionale. Siccome f è monico, f è anche il polinomio minimo di $\sqrt[3]{5}$ su $\mathbb{Q}$. Quindi, una base di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ su $\mathbb{Q}$, come dimostrato in lezione, è
$$\{1, \sqrt[3]{5}, (\sqrt[3]{5})^2\}.$$
Troviamo adesso una base di $\mathbb{F}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Chiramente i è radice del polinomio $g = x^2 + 1$. Le radici di g in $\mathbb{C}$ sono i e $-i$. Chiaramente queste non appartengono a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ perchè questo campo è contenuto in $\mathbb{R}$. Siccome g ha grado 2 e $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ è un campo, allora si conclude che g è irriducibile in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})[x]$. Inoltre, g è monico e, quindi, è il polinomio minimo di i su $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Dal teorema dimostrato in lezione, abbiamo che una base di $\mathbb{F}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ è
$$\{1, i\}.$$
Adesso per il teorema dei gradi e la sua dimostrazione, abbiamo che
$$[\mathbb{F} \colon \mathbb{Q}] = [\mathbb{F} \colon \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \colon \mathbb{Q}] = 2 \cdot 3 = 6$$
e che una base di $\mathbb{F}$ su $\mathbb{Q}$ è
$$\{1, \sqrt[3]{5}, (\sqrt[3]{5})^2, i, i\sqrt[3]{5}, i(\sqrt[3]{5})^2\}.$$

2. Si consideri la funzione di valutazione $\varphi \colon \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})[x] \longrightarrow \mathbb{F}$ definita da $\varphi(f) = f(i)$. Abbiamo visto che la funzione di valutazione è un'omomorfismo di anelli. Vediamo che φ è suriettiva. Abbiamo visto in (1) che $\{1, i\}$ è una base di $\mathbb{F}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Quindi, dato z in $\mathbb{F}$, esistono a e b in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ tali che $z = a + bi$ e, quindi, $z = \varphi(a + bx)$. Questo dimostra che φ è suriettiva. Calcoliamo adesso il nucleo. Il nucleo di un omomorfismo di anelli è un ideale. Inoltre, siccome $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ è un campo, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ è un dominio principale e, quindi, $\mathsf{Ker}(\varphi) = \langle h \rangle$ per un certo h in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})[x]$. Il teorema dell'omomorfismo (o primo teorema dell'isomorfismo) per anelli, dimostra che, allora, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})[x]/\langle h \rangle \cong \mathbb{F}$. Si osservi che, siccome la valutazione di $g = x^2 + 1$ in i è zero, g appartiene a $\langle h \rangle$ e, quindi g divide h. Dall'altra parte, abbiamo dimostrato in (1) che g è il polinomio minimo di i su $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$, e siccome $\varphi(h) = 0$, abbiamo che g divide h. Allora h è associato a g e, quindi, $\langle h \rangle = \langle g \rangle$, come volevamo dimostrare.

3. Il numero complesso $i\sqrt[3]{5}$ appartiene al campo $\mathbb{F}$ e, siccome $\mathbb{F}$ contiene sia $\mathbb{Q}$ che questo elemento, abbiamo che $\mathbb{Q}(i\sqrt[3]{5})$ è contenuto in $\mathbb{F}$. Per dimostrare l'inclusione reciproca, sia $\alpha = i\sqrt[3]{5}$ e si osservi che $\alpha^4 = 5\sqrt[3]{5}$ e, quindi, $\sqrt[3]{5} = \frac{1}{5}\alpha^4$, per cui $\sqrt[3]{5}$ appartiene a $\mathbb{Q}(\alpha)$. Dall'altra parte abbiamo che $\alpha^3 = -5i$ e, quindi, $i = -\frac{1}{5}\alpha^3$, per cui i appartiene a $\mathbb{Q}(\alpha)$. Allora abbiamo l'uguaglianza $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{F}$.

4. Determiniamo prima un polinomio di cui $\alpha = i\sqrt[3]{5}$ sia una radice. Abbiamo che $\alpha^3 = -5i$ e, quindi, $(\alpha^3)^2 = -25$. Allora concludiamo che α è radice del polinomio $p = x^6 + 25$ in $\mathbb{Q}[x]$. Adesso, dalla parte (3) sappiamo che $[\mathbb{Q}(\alpha) \colon \mathbb{Q}] = [\mathbb{F} \colon \mathbb{Q}]$ e, dalla parte (1), sappiamo che quest'ultimo grado è 6. Questo implica che il grado del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ è 6. Allora il polinomio minimo m di α ha grado 6 e divide p. Quindi $p = mq$ per un certo polinomio q in $\mathbb{Q}[x]$. Siccome $\mathbb{Q}$ è un dominio, $\mathsf{deg}(q) = \mathsf{deg}(p) - \mathsf{deg}(m) = 0$. Allora q è invertibile e p è associato a m. Siccome p è monico, allora $p = m$.

5. Sia β un numero reale ma non razionale in $\mathbb{F}$. Come dimostrato il lezione, il grado n del polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}$ coincide con $[\mathbb{Q}(\beta) \colon \mathbb{Q}]$. Ogni elemento z di $\mathbb{F}$ è della forma $a + bi$ per a e b elementi in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ (si veda parti (1) e (2)). Quindi z è reale se e solo se $b = 0$. Questo vuole dire che $\mathbb{F} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ e, quindi, $\mathbb{Q}(\beta)$ è un sottocampo di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Di conseguenza, il teorema dei gradi garantisce che n divide $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \colon \mathbb{Q}] = 3$ (si veda parte (1)). Siccome β non è razionale, abbiamo che $n > 1$ e, di conseguenza, $n = 3$.