Dr. Jorge Vitória
Università degli Studi di Cagliari, 2020/2021
Corso di Laurea in Matematica

Esercizi per il Corso di ALGEBRA 2 - PARTE 2

Foglio 2
14 maggio 2021

1. Si dimostri che se f è un elemento irriducibile non costante di $A[x]$, allora f è primitivo.
2. Sia A un dominio e si consideri il polinomio $f = ax^n$, con $a \in A$. Si dimostri che se, dati g, h in $A[x]$ tali che $f = gh$, allora esitono $1 \leq k \leq n$ e b, c in A tali che $g = bx^k$, $h = cx^{n-k}$.
3. Sia p un elemento primo di $\mathbb{Z}$. L'obiettivo di questo esercizio è dimostrare che il polinomio
$$f = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{p-1} \in \mathbb{Z}[x]$$
è irriducibile.
   (a) Si dimostri che se A e B sono anelli commutativi e $\phi\colon A \longrightarrow B$ è un'isomorfismo di anelli, allora un element a di A è irriducibile se e solo se $\phi(a)$ è irriducibile in B.
   (b) Si dimostri che esiste un'omomorfismo di anelli $\phi\colon \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}[x]$ tale che $\phi(x) = x + 1$, e si dimostri che tale omomorfismo è un isomorfismo.
   (c) Si calcoli $\phi(f)$.
   (d) Si dimostri che $\phi(f)$ è irriducibile e si concluda che allora f è irriducibile.
4. Sia A un dominio fattoriale e f, g elementi di $A[x]$. Si dimostri che $\mathsf{cont}(fg)$ è associato a $\mathsf{cont}(f)\mathsf{cont}(g)$.
5. Si dimostri che $x^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_p[x]$ (p primo in $\mathbb{Z}$) se e solo se $p \equiv 3 (\mathsf{mod}\ 4)$.
6. Si decida e si giustifichi se i seguenti polinomi in $\mathbb{Z}[x]$ sono irriducibili.
   (a) $3x^2 - 21x + 45$;
   (b) $6x^3 + 21x^2 + 97$;
   (c) $12x^5 + 21x^3 - 49x + 28$.
7. Si considerino in $\mathbb{Z}[x]$ i seguenti polinomi
$$f = x^3 + x + 1, \quad g = x^4 + x^2 + 1$$
e si considerino gli ideali $I = \langle 2, f \rangle$ e $J = \langle 2, g \rangle$
   (a) Si determini se I o J sono ideali primi.
   (b) Si determini se I o J sono ideali massimali.
   (c) Si fattorizzi il polinomio g come un prodotto di elementi irriducibili in $\mathbb{Z}_7[x]$.
8. Si fattorizzi il polinomio $f = 4(x^9 - x)$ come un prodotto di elementi irriducibili in
   (a) $\mathbb{Z}[x]$;
   (b) $\mathbb{Z}_3[x]$.