Dr. Jorge Vitória
Università degli Studi di Cagliari, 2020/2021
Corso di Laurea in Matematica

Esercizi per il Corso di ALGEBRA 2 - PARTE 2

Foglio 2
6 maggio 2021

1. Si calcoli un massimo comune divisore fra i seguenti polinomi:
   (a) $f = x^3 - 3x + 4$ e $g = x^4 - 2x + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$;
   (b) $f = 3x^4 + 2x^3 + 2x + 5$ e $g = 2x^2 + 2x - 1$ in $\mathbb{Z}_7[x]$;
   (c) $f = 2x^3 + 3x - 1$ e $g = x^4 + 2x^2 + 1$ in $\mathbb{Z}_5[x]$.

   Per ognuno di loro, si trovino α e β negli anelli indicati sopra tali che $\mathsf{mcd}(f, g) = \alpha f + \beta g$.

2. Si considerino gli annelli $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e $B = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
   (a) Si determinino $U(A)$ e $U(B)$;
   (b) Si dimostri che $2 \in A$ è irriducibile;
   (c) Si dimostri che $2 \in A$ non è primo (si consideri il prodotto $(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$);
   (d) Si dimostri che A non è un dominio fattoriale;
   (e) Si trovi un'elemento di B che sia irriducibile ma non primo;
   (f) Si dimostri che B non è un dominio fattoriale.

3. Sia A un anello commutativo e si consideri una famiglia $(I_n)_{n\geq 0}$ di ideali di A tale che $I_k \subseteq I_{k+1}$ per ogni $k \geq 0$. Si dimostri che l'unione $\cup_{n\geq 0} I_n$ è un ideale di A.

4. Sia A un dominio. Si dimostri che:
   (a) se a è un elemento irriducibile e $b \sim a$, allora b è irriducibile;
   (b) se a è un elemento primo e $b \sim a$, allora b è primo;
   (c) $a \in A$ è un elemento primo se e solo se $A/\langle a \rangle$ è un dominio;
   (d) Se A è un dominio principale, $a \in A$ è un elemento irriducibile se e solo se $A/\langle a \rangle$ è un campo.
   (e) Si dimostri che se $A[x]$ è un dominio a ideali principali allora A è un campo;
   (f) Si dimostri che se $A[x]$ è un dominio fattoriale, allora A è un dominio fattoriale.

5. Si consideri l'anello di polinomi $A = \mathbb{Z}[x]$.
   (a) Si dimostri che l'elemento $x \in A$ è irriducibile in A;
   (b) Si dimostri che A/xA è isomorfo a $\mathbb{Z}$;
   (c) Si concluda che A non è un dominio a ideali principali;
   (d) Si trovi un ideale di A che non sia principale.

6. Sia A un dominio fattoriale. Si dimostri che:
   (a) qualunque insieme $\{a_1, \dots, a_n\}$ di elementi di A ammette un massimo comune divisore e un minimo comune multiplo, e questi sono unici a meno di associazione (generalizzazione della Proposizione 1.9);
   (b) qualunque elemento irriducibile di A è primo (generalizzazione del Lemma 1.20).
   (c) se un elemento a di A è irriducibile in A, allora a è anche irriducibile in $A[x]$;

7. Sia A un dominio a ideali principali e sia $I \neq 0$ un ideale di A. Si dimostri che
   (a) Se I è massimale, allora I è generato da un elemento irriducibile;
   (b) Se I è primo, allora I è generato da un elemento primo.