



CAP.12 – OSCILLAZIONI LIBERE NON SMORZATE DI UN SISTEMA A N GRADI DI LIBERTA'

12.1 CALCOLO DELLE FREQUENZE PROPRIE DI VIBRAZIONE

L'equazione del moto di un sistema non smorzato che vibra liberamente si ottiene eliminando dall'eq.(10.10) il vettore dei carichi e la matrice di smorzamento:

$$[M]\{\ddot{s}_n\} + [K]\{s_n\} = \{0\} \quad (12.1a)$$

nella quale, come detto, $\{s_n\}$ e $\{\ddot{s}_n\}$ indicano rispettivamente il vettore degli spostamenti e delle accelerazioni nodali. Nel seguito, per semplificare le notazioni matematiche, verrà eliminato il pedice n , per cui l'eq. (12.1a) assumerà la forma:

$$[M]\{\ddot{s}\} + [K]\{s\} = \{0\} \quad (12.1b)$$

Per analogia con il comportamento dei sistemi ad un solo grado di libertà, si ipotizzerà che il movimento sia armonico e che possa essere espresso nel modo seguente:

$$\{s(t)\} = \{\hat{s}\}\sin(\omega t + \vartheta) \quad (12.2)$$

in cui $\{\hat{s}\}$ rappresenta i modi di vibrazione possibili del sistema (solo la loro ampiezza varia con il tempo) e ϑ è il ritardo di fase. Le accelerazioni durante le vibrazioni libere sono date dalla derivata seconda dell'espressione precedente:

$$\{\ddot{s}(t)\} = -\omega^2\{\hat{s}\}\sin(\omega t + \vartheta) = -\omega^2\{s(t)\} \quad (12.3)$$

Riportando queste due ultime equazioni nell'eq.(12.1b) si ottiene:

$$-\omega^2[M]\{\hat{s}\}\sin(\omega t + \vartheta) + [K]\{\hat{s}\}\sin(\omega t + \vartheta) = \{0\} \quad (12.4)$$

che deve essere soddisfatta in ogni istante t , cioè per tutti i valori della funzione sinusoidale; quindi:

$$\{[K] - \omega^2[M]\}\{\hat{s}\} = \{0\} \quad (12.5)$$

Una soluzione non banale del sistema è possibile solo se:

$$DET\{[K] - \omega^2[M]\} = \|[K] - \omega^2[M]\| = 0 \quad (12.6)$$

Questo determinante prende il nome di equazione caratteristica del sistema ed assume la forma di un polinomio di grado N in (ω^2) i cui zeri $(\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \omega_3^2 \ \dots \ \omega_N^2)$ sono il quadrato delle frequenze degli N modi di vibrazione possibili. Il modo corrispondente alla frequenza più bassa è chiamato *il primo modo* o *modo fondamentale*, il secondo modo corrisponde alla frequenza successiva, etc. Mettendo queste frequenze in forma matriciale si ottiene il vettore delle frequenze:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_N \end{Bmatrix} \quad (12.7)$$

Un sistema stabile conduce a matrici di massa e di rigidezza simmetriche e definite positive ed in tal caso le soluzioni dell'equazione caratteristica saranno reali e positive.

ESEMPIO E12.1 – Si consideri la struttura della Fig.E12.1a, la cui matrice di rigidezza può essere determinata assemblando le matrici di rigidezza elementari delle tre colonne (si veda lo schema semplificato della fig.E12.1b). Si suppone per semplicità che i solai siano infinitamente rigidi, quindi la struttura verrà modellata usando solo tre gradi di libertà, gli spostamenti orizzontali dei tre piani. La matrice di rigidezza globale si ottiene assemblando quelle elementari. Ipotizzando di utilizzare gli elementi “trave” a due nodi sviluppati secondo la teoria di Eulero-Bernoulli le matrici di rigidezza elementari assumono la forma dell'eq.(11.15). Poiché per semplicità si è ipotizzato che i solai siano infinitamente rigidi, i gradi di libertà di rotazione sono



impediti, quindi la matrice di rigidezza elementare può essere semplificata eliminando la 2° e la 4° riga, la 2° e la 4° colonna i cui coefficienti sono legati alle rotazioni:

$$k_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{12EI_z}{L^3} \\ \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{12EI_z}{L^3} \end{bmatrix} \quad (E12.1.1)$$

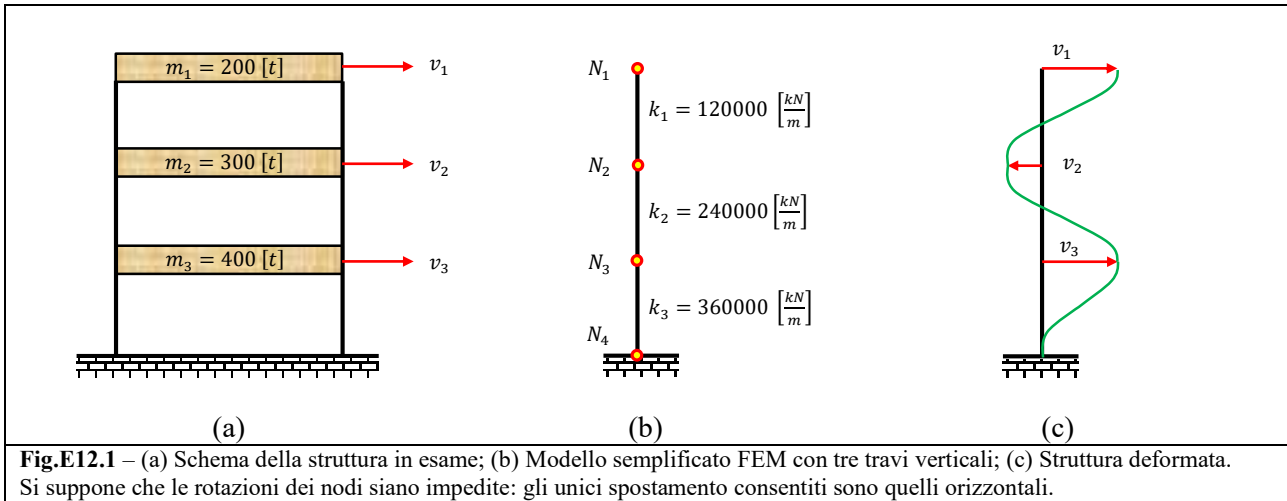


Fig.E12.1 – (a) Schema della struttura in esame; (b) Modello semplificato FEM con tre travi verticali; (c) Struttura deformata. Si suppone che le rotazioni dei nodi siano impedite: gli unici spostamento consentiti sono quelli orizzontali.

Le matrici elementari relative alle tre colonne rappresentate nella Fig.E12.1b risultano:

$$[k]_1 = 120000 \left[\frac{kN}{m} \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [k]_2 = 240000 \left[\frac{kN}{m} \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [k]_3 = 360000 \left[\frac{kN}{m} \right] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assemblando le tre matrici si ottiene:

$$[k]_G = 120000 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 240000 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 360000 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui eseguendo la somma risulta:

$$[k]_G = 120000 \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= 120000 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2+3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} = 120000 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Poiché il nodo inferiore è incastrato al suolo, lo spostamento v_4 è impedito, quindi è necessario eliminare la 4° riga e la 4° colonna della matrice che assume la seguente forma definitiva:

$$[K] = 120\,000 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \left[\frac{kN}{m} \right]$$

La matrice di massa si ottiene semplicemente concentrando nei nodi del modello FEM la massa dei tre solai; ciò che si ottiene è una matrice diagonale:



$$[M] = 200 \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix} [t]$$

Le frequenze proprie della struttura si ottengono calcolando gli autovalori della seguente matrice:

$$[K] - \omega^2 [M] = 120\,000 \frac{kN}{m} \begin{bmatrix} 1-B & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5B & -2 \\ 0 & -2 & 5-2B \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad B \equiv \frac{\omega^2}{600} \quad (\text{E12.1.2})$$

o, in altri termini, calcolando gli zeri del seguente polinomio di terzo grado che si ottiene annullando il determinante della matrice precedente:

$$(1-B)[(3-1.5B)(5-2B) - (-2)(-2)] - (-1)[(-1)(5-2B)] = 0$$

da cui semplificando si ottiene:

$$B^3 - 5.5B^2 + 7.5B - 2 = 0$$

Le soluzioni risultano le seguenti:

$$B_1 = 0.3515$$

$$B_2 = 1.6066$$

$$B_3 = 3.5419$$

di conseguenza il vettore delle frequenze risulta:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.52 \\ 31.05 \\ 46.1 \end{Bmatrix} \frac{rad}{s}$$

12.2 CALCOLO DEI MODI DI VIBRAZIONE

Una volta calcolate le frequenze, le equazioni del moto (12.5) si possono scrivere nel modo seguente:

$$[A]_i \{\hat{s}\}_i = \{0\} \quad (12.8)$$

in cui

$$[A]_i = \{[K] - \omega_i^2 [M]\} \quad (12.9)$$

La matrice $[A]_i$ corrisponde alla frequenza ω_i ed è dunque diversa per ogni modo. L'eq.(12.8) è identicamente soddisfatta poiché le frequenze sono state calcolate a partire da questa condizione; l'ampiezza delle vibrazioni è dunque indeterminata. D'altra parte risolvendo il sistema è possibile ottenere la forma generale associata all' i -esima frequenza, chiamata *modo* i -esimo.

Si ipotizzi che il primo elemento del vettore spostamento abbia valore unitario:

$$\{\hat{s}\}_i = \begin{Bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \vdots \\ \hat{s}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \vdots \\ \hat{s}_N \end{Bmatrix}_i \quad (12.10)$$

L'eq.(12.8) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \vdots \\ \hat{s}_N \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12.11)$$

nella quale le linee rosse indicano il partizionamento della matrice fatto in modo da separare le ampiezze incognite. L'espressione precedente si può scrivere nel modo seguente:



$$\begin{bmatrix} a_{11} & [A_{10}] \\ [A_{01}] & [A_{00}] \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} 1 \\ \{\hat{s}\}_{0i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (12.11a)$$

da cui

$$[A_{01}]_i + [A_{00}]_i \{\hat{s}\}_{0i} = \{0\} \quad (12.12)$$

e

$$a_{11} + [A_{10}] \{\hat{s}\}_{0i} = 0 \quad (12.13)$$

Risolvendo l'eq.(12.12) si ottengono le ampiezze degli spostamenti:

$$\{\hat{s}\}_{0i} = -[A_{00}]_i^{-1} [A_{01}]_i \quad (12.14)$$

L'eq.(12.13) è sovrabbondante: ciò dipende dal fatto che l'eq.(12.8) è identicamente soddisfatta. Il fatto che il vettore spostamento ottenuto a partire dall'eq.(12.14) debba soddisfare l'eq.(12.13) fornisce un mezzo per verificare la precisione della soluzione trovata. La scelta di prendere il primo elemento del vettore spostamento uguale all'unità non è sempre consigliabile. La precisione numerica sarà migliore se si fa corrispondere lo spostamento unitario alla componente dello spostamento che ha l'ampiezza maggiore.

Le ampiezze del vettore $\{\hat{s}\}_{0i}$, completate con la componente di ampiezza unitaria, costituiscono il vettore spostamento associato all' i -esimo modo di vibrazione. In genere questo vettore viene normalizzato dividendo tutte le sue componenti per una componente di riferimento (normalmente la più grande). Il vettore che ne risulta prende il nome di i -esimo modo di vibrazione $\{\phi\}_i$:

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_i \equiv \frac{1}{\hat{s}_{ki}} \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \vdots \\ \hat{s}_N \end{Bmatrix}_i \quad (12.15)$$

in cui \hat{s}_{ki} è la componente di riferimento. Ognuno degli N modi di vibrazione si può determinare seguendo la procedura descritta; allora la matrice quadrata $[\Phi]$ di dimensione $N \times N$ rappresenta gli N modi di vibrare:

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \{\phi\}_3 \quad \dots \quad \{\phi\}_N] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \phi_{31} & \phi_{31} & \dots & \phi_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad (12.16)$$

La determinazione delle frequenze e dei modi di vibrazione di una struttura si riduce dunque al problema del calcolo dei valori e dei vettori propri della matrice (autovalori ed autovettori). Le frequenze proprie di vibrazione del sistema sono le radici quadrate degli autovalori ed i modi di vibrazione corrispondono agli autovettori.

ESEMPIO E12.2 – Si calcolino i modi propri della struttura della Fig.E12.1a. Si parte dalla matrice:

$$[K] - \omega^2 [M] = 120\,000 \frac{kN}{m} \begin{bmatrix} 1 - B & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5B & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2B \end{bmatrix}$$

Per calcolare il modo fondamentale (il primo), si scrive il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 - B_1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5B_1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2B_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

che può essere partizionato come indicato nelle equazioni (12.12) e (12.13):

$$(1 - B_1) - \phi_{21} = 0 \quad (E12.2.1)$$



$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 - 1.5B_1 & -2 \\ -2 & 5 - 2B_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E12.2.2})$$

Ricordando che $B_1 = 0.3515$ il sistema (E12.2.2) assume la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} 2.473 & -2 \\ -2 & 4.297 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.473 & -2 \\ -2 & 4.297 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.649 \\ 0.302 \end{Bmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.649 \\ 0.302 \end{Bmatrix}$$

Per calcolare il secondo modo, si scrive il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 - B_2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5B_2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

che può essere partizionato come indicato nelle equazioni (12.12) e (12.13):

$$(1 - B_2) - \phi_{22} = 0 \quad (\text{E12.2.3})$$

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 - 1.5B_2 & -2 \\ -2 & 5 - 2B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E12.2.4})$$

Ricordando che $B_2 = 1.6066$ il sistema (E12.2.4) assume la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} 2.59 & -2 \\ -2 & 1.787 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.59 & -2 \\ -2 & 1.787 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.607 \\ -0.679 \end{Bmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.607 \\ -0.679 \end{Bmatrix}$$

Per calcolare il terzo modo, si scrive il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 - B_3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1.5B_3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2B_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

che può essere partizionato come indicato nelle equazioni (12.12) e (12.13):

$$(1 - B_3) - \phi_{23} = 0 \quad (\text{E12.2.5})$$

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 - 1.5B_3 & -2 \\ -2 & 5 - 2B_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E12.2.6})$$

Ricordando che $B_3 = 3.5419$ il sistema (E12.2.6) assume la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} -2.313 & -2 \\ -2 & -2.084 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

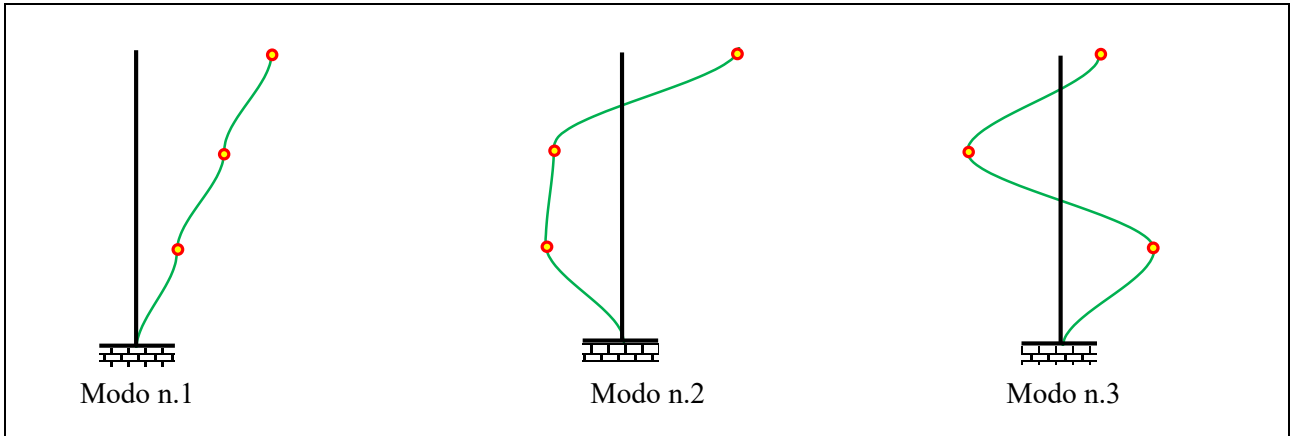
Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.313 & -2 \\ -2 & -2.084 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.542 \\ 2.44 \end{Bmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -2.542 \\ 2.44 \end{Bmatrix}$$

I tre modi possono essere raccolti in una matrice:



$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 0.649 & -0.607 & -2.542 \\ 0.302 & -0.679 & 2.44 \end{bmatrix}$$



12.2.1 PROPRIETÀ DI ORTOGONALITÀ

Gli autovettori $\{\phi\}_i$ che rappresentano i modi di vibrazione godono di alcune proprietà dette di *ortogonalità*. Si considerino per esempio due modi distinti come quelli rappresentati nella Fig.12.1. Per semplicità, la struttura è rappresentata con un sistema di masse concentrate, ma la dimostrazione si può applicare anche ad un modello a masse distribuite.

Le equazioni del moto di un sistema in vibrazione libera, può scriversi nel seguente modo:

$$[K]\{\hat{s}\}_i = \omega_i^2[M]\{\hat{s}\}_i \tag{12.17}$$

dove il secondo membro dell'equazione rappresenta il vettore delle forze d'inerzia $-f_i$ ed il primo membro rappresenta le forze elastiche di richiamo f_s .

E' possibile immaginare che durante la vibrazione libera intervengano degli spostamenti dovuti alle forze d'inerzia applicate sulle masse (vedi la Fig.12.1).

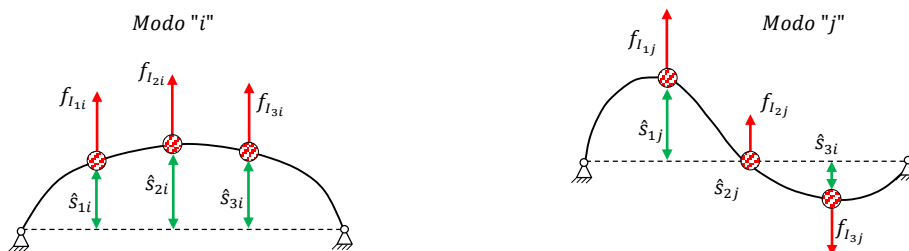


Fig.12.1 – Modi di vibrazione e forze d'inerzia relative

Così i due modi rappresentati sulla figura rappresentano le deformazioni corrispondenti a due sistemi diversi di forze applicate. E' allora possibile applicare il Teorema di Betti:

$$-\{f_I\}_i^T \{\hat{s}\}_j = -\{f_I\}_j^T \{\hat{s}\}_i$$

Il lavoro indiretto che compie un sistema di forze $\{f_I\}_i$ grazie agli spostamenti provocati dall'applicazione di un sistema di forze $\{f_I\}_j$ è uguale al lavoro indiretto che compie il sistema delle forze $\{f_I\}_j$ grazie agli spostamenti provocati dall'applicazione del sistema di forze $\{f_I\}_i$.

Utilizzando l'espressione delle forze d'inerzia, ricordando che la matrice $[M]$ è simmetrica, si ottiene:

$$\omega_i^2 \{\hat{s}\}_i^T [M] \{\hat{s}\}_j = \omega_j^2 \{\hat{s}\}_j^T [M] \{\hat{s}\}_i \tag{12.18}$$



Poiché i due membri dell'equazione sono degli scalari che possono essere arbitrariamente trasposti, questa equazione è equivalente alla seguente:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\{\hat{s}\}_i^T [M] \{\hat{s}\}_j = 0 \quad (12.19)$$

Se si suppone che le due frequenze siano diverse, si ottiene la prima condizione di ortogonalità:

$$\{\hat{s}\}_i^T [M] \{\hat{s}\}_j = 0 \quad (12.20)$$

La seconda condizione di ortogonalità si deduce dalla prima moltiplicando l'eq.(12.17) a sinistra per $\{\hat{s}\}_j^T$:

$$\{\hat{s}\}_j^T [K] \{\hat{s}\}_i = \omega_i^2 \{\hat{s}\}_j^T [M] \{\hat{s}\}_i$$

da cui

$$\{\hat{s}\}_i^T [K] \{\hat{s}\}_j = 0 \quad \text{se} \quad \omega_i \neq \omega_j \quad (12.21)$$

Queste due condizioni mostrano che i vettori che rappresentano i modi di vibrazione sono ortogonali rispetto alla matrice di rigidezza e rispetto alla matrice di massa.

In generale, le condizioni di ortogonalità si esprimono in maniera più comoda con gli autovettori normalizzati $\{\phi\}_i$ piuttosto che con i vettori $\{\hat{s}\}_i$ che hanno un'ampiezza arbitraria. Queste condizioni d'ortogonalità sono chiaramente valide anche quando i vettori $\{\hat{s}\}_i$ e $\{\hat{s}\}_j$ sono moltiplicati per uno scalare diverso da zero: si possono quindi esprimere nel modo seguente:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0 \quad \text{con} \quad i \neq j \quad (12.22a)$$

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = 0 \quad \text{con} \quad i \neq j \quad (12.22b)$$

Le condizioni di ortogonalità non si applicano a due modi aventi la stessa frequenza propria.

12.2.2 NORMALIZZAZIONE

Si è osservato che le ampiezze dei modi di vibrazione sono arbitrarie; qualsiasi ampiezza soddisferà l'eq.(12.5) e solo gli andamenti (cioè le forme) sono definiti in modo univoco. Nella procedura descritta precedentemente l'ampiezza di un grado di libertà (il primo) stata posta pari all'unità e gli altri spostamenti sono stati determinati relativamente a questo valore di riferimento. Questa procedura prende il nome di normalizzazione dei modi rispetto alla coordinata di riferimento scelta.

Sono possibili anche altri modi di normalizzazione; per esempio in numerosi programmi automatici di calcolo, i modi sono normalizzati rispetto al valore massimo di spostamento di ogni modo piuttosto che rispetto ad una coordinata scelta a priori. Il valore massimo in ogni vettore è dunque l'unità, il che fornisce delle grandezze facilmente manipolabili nei calcoli successivi. La procedura di normalizzazione usata più spesso nei programmi di calcolo delle vibrazioni strutturali consiste nell'adeguare le ampiezze in modo che sia soddisfatta la condizione:

$$\{\hat{\phi}\}_i^T [M] \{\hat{\phi}\}_i = 1 \quad (12.23)$$

Ciò può essere fatto calcolando il valore scalare:

$$\{\hat{s}\}_i^T [M] \{\hat{s}\}_i = \hat{M}_i \quad (12.24)$$

in cui $\{\hat{s}\}_i$ rappresenta un'ampiezza modale arbitraria e calcolando i modi normalizzati come segue:

$$\{\hat{\phi}\}_i = \frac{\{\hat{s}\}_i}{\sqrt{\hat{M}_i}} \quad (12.25)$$

Una conseguenza di questo tipo di normalizzazione, con le relazioni d'ortogonalità modale (12.22a) relative alla matrice di massa, è:

$$[\hat{\Phi}]^T [M] [\hat{\Phi}] = [I] \quad (12.26)$$



in cui $[\hat{\Phi}]$ è l'insieme completo degli N modi normalizzati e $[I]$ è la matrice identità di dimensioni $N \times N$. I modi normalizzati in questo modo sono detti ortonormali rispetto alla matrice di massa.

ESEMPIO E12.3 – Si considerino i modi calcolati nell'esempio E12.2. I fattori di normalizzazione si ottengono applicando l'eq.(12.24); poiché in questo caso la matrice di massa è diagonale si ottiene:

$$\{\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \dots \ \phi_N\}_i \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \dots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_i = \{\phi_1 m_1 \ \phi_2 m_2 \ \phi_3 m_3 \ \dots \ \phi_N m_N\}_i \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \dots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_i$$

$$= \{\phi_1 m_1 \phi_1 + \phi_2 m_2 \phi_2 + \phi_3 m_3 \phi_3 + \dots + \phi_N m_N \phi_N\}_i = \hat{M}_i$$

Applicando la formula ai dati dell'esercizio si ottengono i seguenti valori:

$$\hat{M}_1 = 200(1 + 0.649^2 + 0.302^2) \quad \hat{M}_2 = 300(1 + (-0.607)^2 + (-0.679)^2) \quad \hat{M}_3 = 400(1 + (-2.542)^2 + 2.44^2)$$

Eseguendo le operazioni si ottiene:

$$\hat{M}_1 = 362.6$$

$$\hat{M}_2 = 494.8$$

$$\hat{M}_3 = 4519.1$$

Dividendo i tre modi:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.649 \\ 0.302 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.607 \\ -0.679 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -2.542 \\ 2.44 \end{Bmatrix}$$

per la radice quadrata dei fattori \hat{M}_i si ottiene la matrice dei modi ortonormalizzati:

$$[\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} 0.0525 & 0.0450 & 0.0149 \\ 0.0341 & -0.0273 & -0.0378 \\ 0.0159 & -0.0305 & 0.0363 \end{bmatrix}$$

Infine, eseguendo il prodotto dell'eq.(12.26) si ottiene:

$$[\hat{\Phi}]^T [M] [\hat{\Phi}] = \begin{bmatrix} 1.0012 & -0.0008 & 0.0006 \\ -0.0008 & 1.0007 & 0.0008 \\ 0.0006 & 0.0008 & 1.0001 \end{bmatrix} \cong [I]$$

La differenza tra questo risultato e la matrice identità attesa è causata dagli errori di arrotondamento nei calcoli eseguiti.