



CAP.10 – FORMULAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO PER I SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA'

10.1 - IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI IN CAMPO DINAMICO

Le equazioni che governano la risposta statica di una struttura si possono ottenere utilizzando l'equazione dei lavori virtuali:

$$\{\delta s\}^T \{f_c\} + \int_{sup} \{\delta s\}^T \{\Phi\} dS + \int_{vol} \{\delta s\}^T \{F_v\} dvol = \int_{vol} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dvol \quad (10.1)$$

nella quale $\{\delta s\}$ rappresenta il vettore degli spostamenti virtuali, $\{\delta \varepsilon\}$ le corrispondenti deformazioni virtuali, $\{\Phi\}$ il vettore dei carichi superficiali, $\{F_v\}$ i carichi di volume, $\{f_c\}$ i carichi concentrati sui nodi e $\{\sigma\}$ il tensore degli sforzi.

Le equazioni che governano la risposta dinamica si possono ottenere aggiungendo le forze d'inerzia e di smorzamento nell'equazione dei lavori virtuali:

$$\begin{aligned} & \{\delta s\}^T \{f_c\} + \int_{sup} \{\delta s\}^T \{\Phi\} dS + \int_{vol} \{\delta s\}^T \{F_v\} dvol = \\ & = \int_{vol} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dvol + \int_{vol} \{\delta s\}^T \rho \{\ddot{s}\} dvol + \int_{vol} \{\delta s\}^T c_s \{\dot{s}\} dvol \end{aligned} \quad (10.2)$$

dove $\{s\}^T = \{u \quad v \quad w\}$ rappresenta il vettore degli spostamenti, ρ la densità del materiale, c_s il parametro di smorzamento del materiale. Il vettore delle deformazioni si può esprimere nel modo seguente:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\partial] \{s\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

dove la matrice $[\partial]$ è un operatore lineare.

10.2 - BREVI NOTE SUL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

I metodi agli elementi finiti hanno l'obiettivo di risolvere, in modo approssimato, sistemi di equazioni alle derivate parziali e pertanto rivestono un ruolo molto importante in numerosi campi dell'ingegneria. Vengono utilizzati, per esempio, per risolvere problemi di fluidodinamica, di meccanica strutturale, di trasmissione del calore, nel calcolo delle reti elettriche, nei problemi di elettromagnetismo, etc.

Per risolvere il problema continuo si passa da un modello contenente un numero infinito di gradi di libertà (GdL) risolvibile in forma chiusa solo in un numero limitato di casi, ad uno con un numero finito di GdL. Per esempio in un problema statico, calcolata la rigidezza $[K]$ della struttura ed il vettore $\{F\}$ dei carichi applicati, si procede al calcolo degli spostamenti $\{s_n\}$ di alcuni punti della struttura che prendono il nome di "nodi":

$$[K]\{s_n\} = \{F\} \quad (10.3)$$

Nel caso di una molla, K è la sua caratteristica ed il vettore $\{s_n\}$ si riduce ad una sola componente; nel caso di un solido continuo il vettore $\{s_n\}$ può contenere migliaia di componenti e di conseguenza la memorizzazione sul calcolatore della matrice quadrata $[K]$ può richiedere molto spazio.

Per il calcolo della matrice di rigidezza globale $[K]$, la struttura viene divisa in elementi, di ognuno dei quali si calcola la rigidezza elementare $[k_e]$. Gli elementi rappresentano una piccola parte del volume della struttura e sono definiti attraverso la connessione di diversi nodi nei quali si concentrano i gradi di libertà del



sistema. Nei problemi strutturali i GdL sono generalmente gli spostamenti e/o le rotazioni, ai quali talvolta si aggiungono le pressioni, le deformazioni, etc. Le forze di volume e quelle superficiali vengono trasformate in forze nodali equivalenti $\{f_e\}$, calcolate elemento per elemento. Le matrici ed i vettori elementari vengono assemblati rispettivamente nella matrice globale $[K]$ e nel vettore globale $\{F\}$. Il passo successivo comporta la modifica della matrice $[K]$ e nel vettore $\{F\}$ per tener conto delle condizioni al contorno.

Risolto il sistema (10.3), sono note le variabili nodali $\{s_n\}$, per esempio gli spostamenti. Per conoscere il valore che gli spostamenti assumono all'interno di ogni elemento, si utilizzano delle funzioni polinomiali che legano gli spostamenti nodali agli spostamenti dei punti interni, le così dette funzioni di forma (*shape function*) o funzioni di miscelamento (*blending function*).

Noti gli spostamenti nodali, è possibile calcolare, punto per punto, le derivate degli spostamenti e stimare le deformazioni da cui, note le leggi costitutive del materiale, è possibile calcolare gli sforzi. I risultati non sono esatti: si tratta di valori approssimati la cui qualità dipende da numerosi fattori.

10.3 - APPLICAZIONE DEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI ALLA DINAMICA STRUTTURALE

Diviso il modello della struttura in tanti elementi finiti, gli spostamenti $\{s\}$, le velocità $\{\dot{s}\}$ e le accelerazioni $\{\ddot{s}\}$ all'interno di ognuno di essi vengono espressi in funzione dei gradi di libertà nodali $\{s_n\}$ per mezzo delle funzioni di forma:

$$\{s\} = [N]\{s_n\} \quad \{\dot{s}\} = [N]\{\dot{s}_n\} \quad \{\ddot{s}\} = [N]\{\ddot{s}_n\} \quad (10.4)$$

Le funzioni di forma $[N]$ sono funzioni dello spazio mentre gli spostamenti nodali $\{s_n\}$ sono funzioni del tempo. Di conseguenza è possibile esprimere le deformazioni in funzione degli spostamenti nodali:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{s\} = [\partial][N]\{s_n\} = [B]\{s_n\}$$

Introducendo la legge costitutiva del materiale (per esempio la legge di Hooke):

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$$

e osservando che $\{\delta s\}^T = \{\delta s_n\}^T [N]^T$, per ogni elemento finito si può scrivere l'equazione che esprime il Principio dei Lavori Virtuali:

$$\begin{aligned} & \{\delta s_n\}^T \{f_c\} + \{\delta s_n\}^T \int_{S_e} [N]^T \{\Phi\} dS + \{\delta s_n\}^T \int_{V_e} [N]^T \{F_v\} dvol = \\ & = \{\delta s_n\}^T \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dvol \{s_n\} + \{\delta s_n\}^T \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dvol \{\ddot{s}_n\} + \{\delta s_n\}^T \int_{V_e} c_s [N]^T [N] dvol \{\dot{s}_n\} \end{aligned} \quad (10.5a)$$

dove gli integrali di volume e di superficie si limitano all'elemento preso in esame. L'equazione è valida nel caso di deformazione iniziale e di tensione iniziale nulle.

Poiché l'uguaglianza deve valere per qualsiasi configurazione di spostamenti virtuali $\{\delta s_n\}$, si può scrivere:

$$\begin{aligned} & \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dvol \{\ddot{s}_n\} + \int_{V_e} c_s [N]^T [N] dvol \{\dot{s}_n\} + \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dvol \{s_n\} = \\ & \{f_c\} + \int_{S_e} [N]^T \{\Phi\} dS + \int_{V_e} [N]^T \{F_v\} dvol \end{aligned} \quad (10.5b)$$

che si può sintetizzare ed esprimere nel modo seguente:

$$[m_e]\{\ddot{s}_n\} + [c_e]\{\dot{s}_n\} + [k_e]\{s_n\} = \{f_c\} + \{f_s\} + \{f_v\} \quad (10.6)$$

dove $[m_e]$ è la matrice di massa elementare, $[c_e]$ è la matrice dello smorzamento elementare, $[k_e]$ è la matrice di rigidità elementare, $\{f_c\}$ è il vettore delle forze concentrate che agiscono sui nodi dell'elemento, $\{f_s\}$ è il vettore delle forze nodali equivalenti alle forze che agiscono sulla superficie dell'elemento e $\{f_v\}$ è il vettore delle forze nodali equivalenti alle forze che agiscono nel volume dell'elemento:



$$[m_e] = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dvol \quad [c_e] = \int_{V_e} c_s [N]^T [N] dvol \quad [k_e] = \int_{V_e} [B]^T [E] [B] dvol$$

$$\{f_s\} = \int_{S_e} [N]^T \{\Phi\} dS \quad \{f_v\} = \int_{V_e} [N]^T \{F_v\} dvol$$

La matrice di massa $[m_e]$ può essere ricavata in altro modo, sempre partendo da considerazioni energetiche, scrivendo l'energia cinetica dell'elemento:

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{s}\}^T \{\dot{s}\} dvol = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{s}_n\}^T [N]^T [N] \{\dot{s}_n\} dvol = \frac{1}{2} \{\dot{s}_n\}^T \cdot \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dvol \cdot \{\dot{s}_n\} \quad (10.7)$$

ovvero:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{s}_n\}^T \cdot \left\{ \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dvol \right\} \cdot \{\dot{s}_n\} = \frac{1}{2} \{\dot{s}_n\}^T [M] \{\dot{s}_n\} \quad (10.8)$$

e

$$[m_e] = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dvol \quad (10.9)$$

Una volta calcolate le matrici ed i vettori elementari, questi vengono assemblati a formare le corrispondenti matrici e vettori globali. Al termine di questa operazione è possibile scrivere la seguente equazione di equilibrio dinamico dell'intera struttura:

$$[M] \{\ddot{s}_n\} + [C] \{\dot{s}_n\} + [K] \{s_n\} = \{f_{ext}\} \quad (10.10)$$

nella quale i vettori $\{s_n\}$, $\{\dot{s}_n\}$, $\{\ddot{s}_n\}$ si riferiscono a tutti i nodi della struttura e $\{f_{ext}\}$ rappresenta la somma di tutte le forze nodali esterne. I metodi dell'analisi dinamica hanno l'obiettivo di risolvere questa equazione.

I metodi modali hanno l'obiettivo di disaccoppiare le equazioni: dopo di che, ognuna di esse può essere risolta indipendentemente dalle altre.

I metodi d'integrazione diretta, discretizzano l'eq.(10.10) nel tempo in modo da ottenere una sequenza temporale di sistemi di equazioni algebriche.

Talvolta l'equazione (10.10) assume la seguente forma:

$$[M] \{\ddot{s}_n\} + [C] \{\dot{s}_n\} + \{f_{int}\} = \{f_{ext}\} \quad (10.11)$$

nella quale il vettore $\{f_{int}\}$ delle forze interne si ottiene assemblando il vettore delle forze interne elementari:

$$\{f_{int}\}_e = \int_{V_e} [B]^T \{\sigma\} dvol \quad (10.12)$$

Gli sforzi all'interno dell'elemento si calcolano con la seguente formula:

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} = [E] [B] \{s_n\}$$

e ciò consente, utilizzando un'opportuna matrice $[E]$ eventualmente funzione del campo di deformazione, di prendere in considerazione la non linearità del materiale. Questa procedura consente inoltre di evitare l'assemblaggio della matrice di rigidità $[K]$ che solitamente occupa molta memoria.

Quando per il calcolo delle matrici elementari $[m_e]$ e $[c_e]$ si utilizzano esattamente le stesse funzioni di forma $[N]$ usate per interpolare il campo di spostamento, le matrici prendono il nome rispettivamente di *matrice di massa consistente* e *matrice di smorzamento consistente*. Queste matrici sono simmetriche e, a livello elementare, normalmente sono piene. Quando però si assemblano, le matrici di massa e di smorzamento hanno la stessa topologia della matrice di rigidità globale. Quando la densità del materiale ρ e il coefficiente



di smorzamento c_s sono diversi da zero, le matrici di massa e di smorzamento consistenti sono definite positive: per esempio, l'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} \{\dot{s}_n\}^T [m_e] \{\dot{s}_n\} > 0$$

per qualsiasi $\{\dot{s}_n\} \neq \{0\}$.