Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esercizi per il Corso di Logica Matematica - Introduzione alla Teoria delle Categorie

Foglio 9

5 dicembre 2019

1. Ricordiamo che una coppia $(M, *)$ si dice un **monoide** se M è un insieme e $*$ è una operazione binaria su M tali che $*$ è associativa ed esiste un elemento identità per l'operazione $*$.

   (a) Sia $\mathcal{C}$ una categoria e X un oggetto in $\mathcal{C}$. Si dimostri che $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathcal{C}(X, X)$ è un monoide (dove $*$ è la composizione in $\mathcal{C}$) e che il sottoinsieme $\mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ degli isomorfismi in $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X)$ è un gruppo per la stessa operazione.

   (b) Si usi il lemma di Yoneda per dimostrare che, per ogni dei seguenti funtori F, $\mathsf{Nat}(F, F)$ è un insieme e si determini, in un modo il più chiaro possibile, la sua strutture di monoide. Si determini anche la strutture di gruppo delle equivalenze naturali $\mathsf{Eq}(F, F)$.

      i. Il funtore dimenticante $\mathsf{U}\colon \mathsf{Ab} \longrightarrow \mathsf{Set}$;
      ii. Il funtore dimenticante $\mathsf{U}\colon \mathsf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathsf{Set}$;
      iii. Il funtore dimenticante $\mathsf{U}\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$;
      iv. Il funtore (contravariante) potenza $\mathcal{P}\colon \mathsf{Set}^{op} \longrightarrow \mathsf{Set}$.

2. Sia G un gruppo finito e sia $\mathcal{G}$ la categoria con un oggetto $*$ tale che $\mathcal{G}(*, *) = G$.

   (a) Si dimostri che ogni $F\colon \mathcal{G} \longrightarrow \mathsf{Set}$ è unicamente determinato per una azione sinistra di G su un insieme X.[1]

   (b) Siano k una azione di G su un insieme X e m una azione di G su un insieme Y. Siano F_k e F_m i funtori associati. Si dimostri che $\mathsf{Nat}(F_k, F_m)$ corrispondono biettivamente alle funzioni $f\colon X \longrightarrow Y$ tali che $f(k(g, x)) = m(g, f(x))$ per ogni x in X e ogni g in G (queste funzioni sono dette **G-equivarianti**).

   (c) Si determini la azione sinistra di G corrispondente al funtore $\mathcal{G}(*, -)$.

   (d) Si dimostri che $\mathsf{Nat}(\mathcal{G}(*, -), \mathcal{G}(*, -))$ corrisponde biettivamente, attraverso la identificazione della parte (b), agli isomorfismi di gruppo $G \longrightarrow G$.

   (e) Si usi il lemma di Yoneda per dimostrare il teorema di Cayley: ogni gruppo finito è isomorfo ad un sottogruppo finito di un gruppo simmetrico S_n.

[1] Una azione sinistra di un gruppo G su un insieme X è una funzione $k\colon G \times X \longrightarrow X$ tale che $k(1, x) = x$ e $k(gh, x) = k(g, k(h, x))$ per ogni x in X e ogni g, h in G.