Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esercizi per il Corso di Logica Matematica - Introduzione alla Teoria delle Categorie

Foglio 8

28 novembre 2019

1. SI dimostri che se $X \cong Y$ in una categoria $\mathcal{C}$ allora $H_X \cong H_Y$ e $H^X \cong H^Y$.

2. Si dimostri che il funtore dimenticante $U\colon \mathsf{Ring} \longrightarrow \mathsf{Set}$ è rappresentabile. [1]

3. Sia $\mathcal{O}\colon \mathsf{Top}^{op} \longrightarrow \mathsf{Set}$ il funtore (controvariante) che invia uno spazio topologico X nell'insieme di tutti gli aperti di X. Si dimostri che $\mathcal{O}$ è rappresentabile. [2]

4. Siano $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtori tali che $F \dashv G$. Si dimostri che, per ogni oggetto Y in $\mathcal{D}$ il funtore controvariante $\mathcal{D}(F(-), Y)$ è rappresentabile.

5. Sia $\mathcal{O}\colon \mathsf{Haus}^{op} \longrightarrow \mathsf{Set}$ il funtore (controvariante) che invia uno spazio topologico Hausdorff X nell'insieme di tutti gli aperti di X.

   (a) Si dimostri che se $\mathcal{O} \cong \mathsf{Haus}(-, Y)$ allora Y ha precisamente due elementi.[3]

   (b) Si concluda che se $\mathcal{O} \cong \mathsf{Haus}(-, Y)$ allora Y è lo spazio topologico discreto con due elementi.

   (c) Si dimostri che $\mathcal{O}$ non è rappresentabile. [4]

6. Si dimostri che per due oggetti X e Y in una categoria $\mathcal{C}$, se $H^X \cong H^Y$ allora $X \cong Y$.

7. Si dimostri che il funtore $(-)^\times\colon \mathsf{Ring} \longrightarrow \mathsf{Set}$ che invia un anello R nell'insieme $R^\times$ dei suoi elementi invertibili (si verifichi che è veramente un funtore!) è rappresentabile.

---

[1] Si consideri l'anello $\mathbb{Z}[X]$.

[2] Si consideri lo **spazio di Sierpinski**: l'insieme con due elementi, in cui la topologia è l'unica topologia nell'insieme con due elementi che non è banale e non è discreta.

[3] Si verifichi cosa succede allo spazio topologico con un solo punto.

[4] Si consideri qualsiasi spazio topologico connesso con più di due elementi. Uno spazio topologico X è connesso se X non si può scrivere come la unione di due aperti disgiunti e non-vuoti.