Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esercizi per il Corso di LOGICA MATEMATICA - INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE CATEGORIE

Foglio 7

21 novembre 2019

1. Si ricordi dall'esercizio 3 del Foglio 2 che insiemi parzialmente ordinati possono essere riguardati naturalmente come categorie, e ogni funtore fra categorie di questo genere può essere riguardato come una funzione che preserva l'ordine.

   (a) Si considerino due insiemi parzialmente ordinati X e Y e una coppia di funzioni $f\colon X \longrightarrow Y$ e $g\colon Y \longrightarrow X$ che preservano l'ordine. Siano F e G i funtori associati a f e a g rispettivamente. Si dimostri che $F \dashv G$ se e solo se $f(x) \leq y \Leftrightarrow y \leq g(x)$.

   (b) Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme potenza di X. Si consideri $\mathcal{P}(X)$ come un insieme parzialmente ordinato per l'inclusione $\subseteq$. Sia $\mathcal{C}(X)$ l'insieme parzialmente ordinato di tutti sottoinsiemi chiusi di X.

      i. Si dimostri che l'operazione di chiusura è una funzione $ch\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ che preserva l'ordine.

      ii. Si dimostri che la funzione di inclusione $\iota\colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ preserva l'ordine.

      iii. Si dimostri che per ogni sottoinsieme A di X e ogni insieme chiuso B di X, $ch(A) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq \iota(B)$.

      iv. Si concluda che $ch \dashv \iota$ come funtori fra le categorie associate a $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{P}(X)$.

2. Si consideri il funtore dimenticante $U\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$, e si considerino i funtori D e I tali che $D \dashv U$ e $U \dashv I$. Si determinino esplicitamente unità e counità per queste aggiunzioni.

3. Siano $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtore aggiunto a sinistra di $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ e siano η e ϵ le trasformazioni naturali unità e counità associate ad una aggiunzione fissata. Si definisca $\mathsf{Fix}(FG)$ come essendo la categoria di cui gli oggetti sono quelli oggetti Y di $\mathcal{D}$ tali che ϵ_Y è un isomorfismo, e dove i morfismi da Y in Y' in $\mathsf{Fix}(FG)$ sono tutti morfismi $\mathcal{D}(Y, Y')$ in $\mathcal{D}$. Dualmente, si definisca $\mathsf{Fix}(GF)$ come essendo la categoria di cui gli oggetti sono quelli oggetti X di $\mathcal{C}$ tali che η_X è un isomorfismo, e dove i morfismi da X in X' in $\mathsf{Fix}(GF)$ sono tutti morfismi $\mathcal{D}(X, X')$ in $\mathcal{D}$.

   (a) Si dimostri che F si restringe ad un funtore $F'\colon \mathsf{Fix}(GF) \longrightarrow \mathsf{Fix}(FG)$ e che G si restringe ad un funtore $G'\colon \mathsf{Fix}(FG) \longrightarrow \mathsf{Fix}(GF)$.

   (b) Si dimostri che F' è una equivalenza di categorie e che G' è un suo quasi-inverso.

   (c) Si trovino esempi di questo tipo di equivalenze di categorie attraverso gli esempi di funtori aggiunti discussi in lezione.

4. Si dimostri che se $F \dashv G$ e G è pienamente fedele, allora la counità ϵ della aggiunzione è una equivalenza naturale. Si trovino esempi di aggiunzioni di questo tipo.