Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esercizi per il Corso di LOGICA MATEMATICA - INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE CATEGORIE

Foglio 6
7 novembre 2019

1. Si dimostri che se V è uno spazio vettoriale di dimension n e W è uno spazio vettoriale di dimensione m, allora $V \otimes W$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n \cdot m$.

2. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Si dimostri che il funtore $\mathbb{K} \otimes -$ è naturalmente equivalente al funtore identità nella categoria degli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

3. Siano G e H due gruppi e siano $\mathcal{C}_G$ e $\mathcal{C}_H$ le categorie definite nell'esercizio 3 del Foglio 3.
   (a) Si dimostri che i funtori da $\mathcal{C}_G$ in $\mathcal{C}_H$ sono in biiezione con gli omomorfismi di gruppi $G \longrightarrow H$.
   (b) Supponiamo che abbiamo una aggiunzione $A \dashv B$ per due funtori $A\colon \mathcal{C}_G \longrightarrow \mathcal{C}_H$ e $B\colon \mathcal{C}_H \longrightarrow \mathcal{C}_G$. Cosa possiamo dire su gli omomorfismi di gruppi associati a A e B?

4. Si dimostri che le categorie Set e Top non sono equivalenti.

5. Siano $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funtori tali che $F \dashv G$. Si dimostri che
   (a) Se A è un oggetto iniziale di $\mathcal{C}$ allora $F(A)$ è un oggetto iniziale in $\mathcal{D}$;
   (b) Se B è un oggetto finale in $\mathcal{D}$ allora $G(B)$ è un oggetto finale in $\mathcal{C}$.

   In più, si trovino contro-esempi per le implicazioni reciproche.

6. Sia $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ una equivalenza di categorie e sia $G\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ un suo quasi-inverso. Si dimostri che $F \dashv G$ e che $G \dashv F$.