Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esercizi per il Corso di Logica Matematica - Introduzione alla Teoria delle Categorie

Foglio 3
10 ottobre 2019

1. Sia $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtore fra le categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un morfismo in $\mathcal{C}$. Si dimostri che
   (a) se F è fedele, allora se $F(f)$ è un monomorfismo allora f è un monomorfismo;
   (b) se F è fedele, allora se $F(f)$ è un epimorfismo allora f è un epimorfismo;
   (c) se F è pienamente fedele e se $F(X)$ è un oggetto iniziale in $\mathcal{D}$, allora X è un oggetto iniziale in $\mathcal{C}$;
   (d) se F è pienamente fedele e se $F(X)$ è un oggetto finale in $\mathcal{D}$, allora X è un oggetto finale in $\mathcal{C}$;
   (e) se F è pienamente fedele e se $F(X)$ è un oggetto zero in $\mathcal{D}$, allora X è un oggetto zero in $\mathcal{C}$.

2. Si trovino esempi di categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e funtori $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tali che:
   (a) F è pieno ma esiste un morfismo f in $\mathcal{D}$ tale che non esiste g in $\mathcal{C}$ tale che $F(g) = f$;
   (b) F è fedele ma esistono morfismi g e h in $\mathcal{C}$ tali che $F(g) = F(h)$;

3. Sia G un gruppo.
   (a) Si dimostri che esiste una categoria $\mathcal{C}_G$ con un solo oggetto X e tale che $\mathcal{C}_G(X, X) = G$.
   (b) Si dimostri che nella categoria $\mathcal{C}_G$ ogni morfismo è un isomorfismo.
   (c) Si dimostri che ad ogni omomorfismo di gruppi $\alpha\colon G \longrightarrow H$ possiamo associare un funtore $F_\alpha\colon \mathcal{C}_G \longrightarrow \mathcal{C}_H$ tale che $F_\alpha(g) = \alpha(g)$ per ogni g in $\mathcal{C}_G(X, X) = G$.

4. Per un spazio topologico X si consideri $C(X) := \mathsf{Top}(X, \mathbb{R})$, dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali con la topologia usuale.
   (a) Si dimostri che le operazioni $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ definiscono una struttura di annello (commutativo) nell'insieme $C(X)$.
   (b) Si dimostri che $C\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ring}$ è un funtore controvariante, cioè, che $C\colon \mathsf{Top}^{op} \longrightarrow \mathsf{Ring}$ is a functor.