

## Esercizi per il Corso di LOGICA MATEMATICA - INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE CATEGORIE

### Foglio 2

3 ottobre 2019

1. Sia  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtore fra le categorie  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  e sia  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo in  $\mathcal{C}$ . Si dimostri che se  $f$  è un isomorfismo, allora  $F(f)$  è un isomorfismo in  $\mathcal{D}$ .
2. Si trovino esempi di categorie  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  e funtori  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tali che:
  - (a) esiste un monomorfismo  $f$  in  $\mathcal{C}$  tale che  $F(f)$  non è un monomorfismo in  $\mathcal{D}$ ;
  - (b) esiste un epimorfismo  $f$  in  $\mathcal{C}$  tale che  $F(f)$  non è un epimorfismo in  $\mathcal{D}$ ;
  - (c) esiste un oggetto iniziale  $X$  in  $\mathcal{C}$  tale che  $F(X)$  non è iniziale in  $\mathcal{D}$ ;
  - (d) esiste un oggetto finale  $X$  in  $\mathcal{C}$  tale che  $F(X)$  non è finale in  $\mathcal{D}$ ;
  - (e) esiste un oggetto zero  $X$  in  $\mathcal{C}$  tale che  $F(X)$  non è zero in  $\mathcal{D}$ .
3. Sia  $(X, \leq)$  un insieme parzialmente ordinato<sup>1</sup>.
  - (a) Si dimostri che esiste una categoria  $\mathcal{X}$  è una categoria dove gli oggetti sono gli elementi di  $X$  e  $\mathcal{X}(x, y) = \{f_{xy}\}$  se  $x \leq y$  e  $\mathcal{X}(x, y) = \emptyset$  se  $x \not\leq y$ , dove  $f_{yz} \circ f_{xy} = f_{xz}$ .
  - (b) Si dimostri che se  $(X, \leq)$  e  $(Y, \preceq)$  sono insiemi parzialmente ordinati e se  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  sono le categorie associate (come in (a)), allora un funtore  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  è determina e è completamente determinato per un funzione fra gli insiemi  $f: X \rightarrow Y$  tale che

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \preceq f(b).$$

---

<sup>1</sup>Ricordiamo che un'ordine parziale su un insieme  $X$  è una relazione  $\leq$  che è riflessiva ( $x \leq x$  per ogni  $x \in X$ ), transitiva ( $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ , per ogni  $x, y, z \in X$ ) e antisimmetrica ( $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ ).