Jorge Vitória, email: jorge.vitoria@unica.it
Università di Studi di Cagliari, 2019/2020
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Esercizi per il Corso di LOGICA MATEMATICA - INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE CATEGORIE

Foglio 1
26 settembre 2019

1. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due categorie. Si definisca una categoria $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (esplicitando la composizione e il morfismo identità per ogni ogetto, e verificando gli assiomi) dove gli ogetti sono $\mathsf{Ob}(\mathcal{A}) \times \mathsf{Ob}(\mathcal{B})$ e i morfismi sono $\mathcal{A} \times \mathcal{B}((A,B),(A',B')) = \mathcal{A}(A,A') \times \mathcal{B}(B,B')$, per ogni A, A' in $\mathcal{A}$ e ogni B, B' in $\mathcal{B}$.

2. Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Si dimostri che se un morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ in $\mathcal{C}$ ammette un inverso, cioè, un morfismo $g\colon B \longrightarrow A$ tale che $f \circ g = 1_B$ e $g \circ A = 1_A$, allora questo inverso è unico.

3. Sia A un insieme e sia $f\colon A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ una funzione. Si consideri l'insieme
$$\{a \in A : a \notin f(a)\}.$$
Si dimostri che f non può essere soriettiva. Si usi questo fatto per dimostrare il teorema di Cantor, cioè, che la cardinalità di un insieme A è sempre minore dalla cardinalità del insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$.

4. Si dimostri che se X e Y sono oggetti iniziali (respettivamente finali, o zero) in una categoria $\mathcal{C}$ allora X e Y sono isomorfi. Si concluda che se una categoria ha un ogetto zero questo è isomorfo a tutti gli oggetti iniziali e tutti gli oggetti finali della categoria.

5. Per ogni delle seguenti categorie, si determini se hanno oggetti iniziali, oggetti finali o oggetti zero.
   (a) La categoria $\mathsf{Vect}_{\mathbb{K}}$ degli spazi vettoriali su um campo $\mathbb{K}$;
   (b) La categoria Ring degli annelli;
   (c) La categoria Top degli spazi topologici.

6. Si dimostri che l'omomorfismo di annelli canonico $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, \phi(n) = \frac{n}{1}$ è un bimorfismo nella categoria degli annelli.

7. Si dimostri che nella categoria Set degli insiemi, i monomorfismi sono le funzioni iniettive, gli epimorfismi sono le funzioni suriettive e gli isomorfismi sono le funzioni biettive.

8. Chi sono i monomorfismi, epimorfismi, bimorfismi e isomorfismi nella categoria degli
   (a) spazi topologici Top?
   (b) spazi topologici Hausdorff [1] Haus?

9. Sia Toph la categoria che ha come oggetti gli spazi topologici e come morfismi fra due spazi topologici X e Y le classi di omotopia[2] di funzioni continue $f\colon X \longrightarrow Y$. Chi sono gli isomorfismi di questa categoria?

[1] Si ricordi che un spazio topologico X si dice **Hausdorff** se per ogni punti x e y di X, esistono aperti U e V in X tali che $U \cap V = \emptyset$ e $x \in U$ e $y \in V$.

[2] Si ricordi che due funzioni continue $f\colon X \longrightarrow Y$ e $g\colon X \longrightarrow Y$ sono **omotopiche** se esiste una funzione continua $H\colon [0,1] \times X \longrightarrow Y$ tale che $H(0,x) = f(x)$ e $H(1,x) = g(x)$